بسم الله الرحمن الرحیم　　　　روش های انرژی　　　　جلسه ۲۴

9.8 Principle of Complementary Potential Energy and castagiliano Theorem II

انرژی پتانسیل مجازی مکمل　　$\delta V^* = -\delta W_E^*$

انرژی کرنشی مجازی مکمل　　$\delta U^* = \delta W_I^*$　　(9.8-1)

اصل ماکزیمم انرژی پتانسیل مکمل بیان می کند که:

$$\delta \Pi^* = \delta(U^* + V^*) = 0 \qquad (9.8\text{-}2)$$

Π^* بیانگر کل انرژی پتانسیل مکمل است

$$\delta \Pi^* = \delta U^* + \delta V^* = 0 \longrightarrow \delta U^* = -\delta V^* \qquad (9.8\text{-}3)$$

می دانیم:

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial F_i}\delta F_i \quad , \quad \delta V^* = \frac{\partial V^*}{\partial F_i}\delta F_i = -u_i\,\delta F_i \qquad (9.8\text{-}4)$$

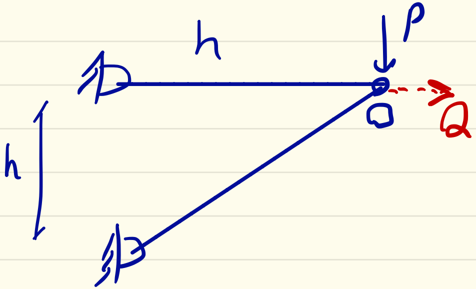
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U^*}{\partial F_i} - u_i\right)\delta F_i = 0 \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i} \qquad (9.8\text{-}5)$$

رابطه (9.8-5) بیانگر اصل کاستیگلیانو II می‌باشد که برای اجسام الاستیک خطی یا غیرخطی برقرار است.

اگر جسم الاستیک خطی باشد $U = U^*$ است.

U همواره برحسب جابجایی‌ها نوشته می‌شود در صورتیکه U^* برحسب نیروها بیان می‌شود.

تئوری کاستیگلیانو II مانند بار واحد مجازی، برای یافتن جابجایی و شیب تکیه‌گاه‌ها استفاده می‌شود.



وافقی

مثال: جابجایی عمودی V واقعی نقطه O را بیابید (تئوری کاستیگلیانو II)

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \frac{1}{E^{(i)}} \left(\sigma^{(i)}\right)^2 dV$$

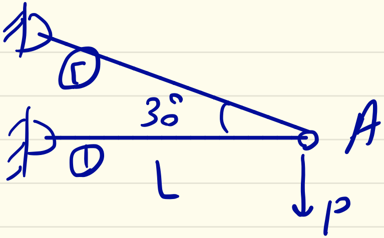
$$= \frac{A}{2E} \left\{ h\left(\frac{P+Q}{A}\right)^2 + \sqrt{2}\, h \left(-\frac{\sqrt{2}P}{A}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{h}{2EA} \left(P^2 + Q^2 + 2PQ + 2\sqrt{2}P^2\right) \qquad (a)$$

با استفاده از اصل کاستیلیانو می‌توان گفت:

$$u = \left(\frac{\partial U^*}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \frac{Ph}{EA} \qquad (b)$$

$$v = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P}\right)_{Q=0} = \frac{Ph}{EA}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \qquad (c)$$



مثال: جابجایی عمودی نقطه A را بیابید

$$A_1 = A_2 = A$$

$$\sigma = \begin{cases} E\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -E\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (a) \qquad \text{or} \qquad \varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{E^2} & \sigma \geq 0 \\ -\dfrac{\sigma^2}{E^2} & \sigma \leq 0 \end{cases} \quad (b)$$

$$F_1 = -\sqrt{3}P, \quad F_2 = 2P, \quad \sigma^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}P}{A}, \quad \sigma^{(2)} = \frac{2P}{A} \qquad (c)$$

$$U^* = \sum_{i=1}^{2} \int_V \left(\int_0^{\sigma^{(i)}} \varepsilon^{(i)} d\sigma^{(i)} \right) dV$$

$$= \left[-AL \frac{1}{3E^2} \left(\sigma^{(1)}\right)^3 + \frac{2}{\sqrt{3}} AL \frac{1}{3E^2} \left(\sigma^{(2)}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}P^3L}{E^2A^2} + \frac{16\sqrt{3}P^3L}{9E^2A^2} = \frac{25\sqrt{3}}{9} \frac{P^3L}{E^2A^2} \qquad (d)$$

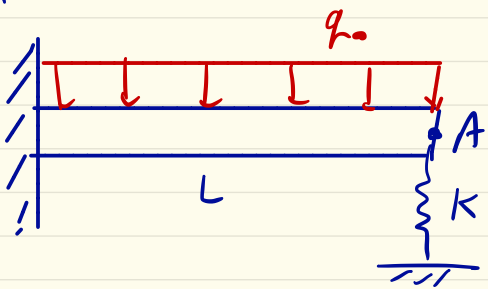
$$\Rightarrow v = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{25}{\sqrt{3}} \frac{P^2L}{E^2A^2}$$

9.7 Betti's and Maxwell's Reciprocity Theorem

اصل برهم نهی یا سوپرپوزیشن برای یک جسم بیان می کند که جابجائی نقطه ای از جسم تحت مجموعه نیروها ، برابر است با مجموع جابجائی های آن نقطه در اثر تک تک نیروها به تنهائی:

$L(w) = P$ باید خطی باشد $\therefore$ $L(w_1 + w_2) = L(w_1) + L(w_2)$

ولی این اصل برای انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل صادق نیست. زیرا آنها از توان دوم جابجائی استفاده می کنند. مثلا

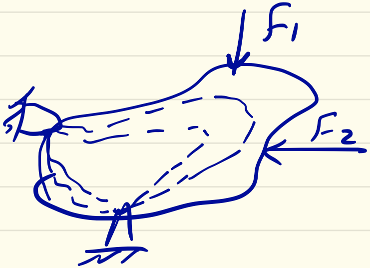


$$w_0^A = w_0^q + w_0^s = \frac{q_0 L^4}{8EI} - \frac{F_s L^3}{3EI} \qquad (9.7\text{-}11)$$

$$F_s = w_o^A \cdot K$$

$$\xrightarrow{(9.7\text{-}1)} \quad w_o^A = \frac{q_o L^4}{8EI\left(1 + \frac{KL^3}{3EI}\right)} \qquad (9.7\text{-}2)$$

فرض کنید جسم الاستیک خطی درحال تعادل است و تحت نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ قرار می‌گیرد.



اگر ابتدا نیروی $\vec{F}_1$ به جسم اعمال شود
این نیرو کار W_1 را انجام می‌دهد.
سپس نیروی $\vec{F}_2$ اعمال می‌شود. کار انجام شده
توسط این نیرو W_2 است (که همان است که اگر نیروی $\vec{F}_2$ به جسم از ابتدا
وارد می‌شد). ولی نیروی $\vec{F}_1$ که از قبل روی جسم موجود بود در اثر تغییر شکل
حاصل از نیروی $\vec{F}_2$ کار W_{12} را انجام می‌دهد. پس در انتها، کل
کار انجام شده توسط جسم عبارتست از:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} \quad (9.7\text{-}3a)$$

حال اگر ترتیب اعمال نیروها جابجا شود داریم:

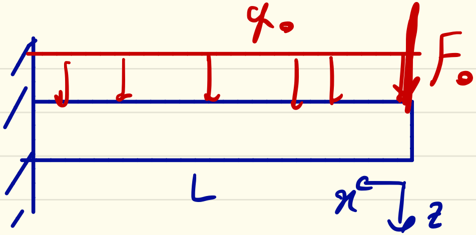
$$\overline{W} = W_1 + W_2 + W_{21} \quad (9.7\text{-}3b)$$

درنهایت کار انجام شده توسط دو حالت فوق باید یکسان باشد. پس:

$$W = \overline{W} \quad \text{or} \quad W_{12} = W_{21} \quad (9.7\text{-}4)$$

رابطه (9.7-4) بیان ریاضی تئوری اثر متقابل Betty است (1823-1892).
این تئوری بیان می‌کند که در یک جسم الاستیک خطی که تحت دو دسته نیروها
خارجی می‌باشد، کار انجام شده توسط دسته اول نیروها تحت جابجایی صورت
گرفته توسط دسته دوم نیروها برابر است با کار انجام شده توسط دسته دوم
نیروها تحت جابجایی صورت گرفته توسط دسته اول نیروها.

مثال:



$$w_0^F(x) = \frac{F_0}{6EI}\left(x^3 - 3L^2x + 2L^3\right)$$

$$w_0^q(x) = \frac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 4L^3x + 3L^4\right)$$

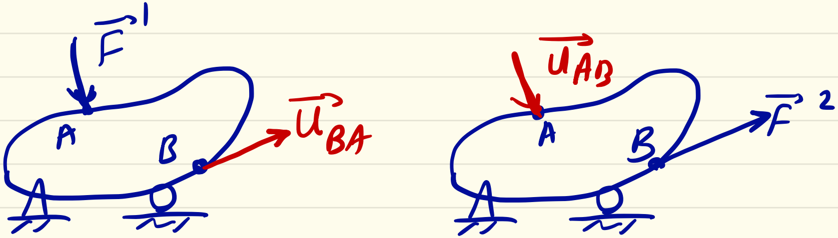
$$w_{12} = F_0 \; w_0^q(0) = \frac{F_0 q_0 L^4}{8EI}$$

$$w_{21} = \int_0^L \frac{F_0}{6EI}\left(x^3 - 3L^2x + 2L^3\right) q_0 \, dx = \frac{F_0 q_0 L^4}{8EI}$$

یکی از حالتهای خاص تئوری Betty توسط maxwell (1831-1879)

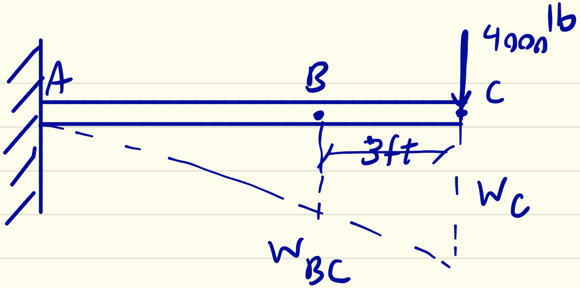
ارائه شد:

فرض کنید جسم الاستیک خطی تحت دو نیرو با مقدار واحد $\vec{F}^1$ در نقطه A و $\vec{F}^2$ در نقطه B باشد. آنگاه اگر $\vec{u}_{AB}$ جابجائی نقطه A در جهت نیروی $\vec{F}^1$ تولید شده توسط نیروی یکه $\vec{F}^2$ باشد و $\vec{u}_{BA}$ جابجائی نقطه B در جهت نیروی $\vec{F}^2$ تولید شده توسط نیروی $\vec{F}^1$ باشد، طبق تئوری بتی داریم:



$$\vec{F}^1 \cdot \vec{u}_{AB} = \vec{F}^2 \cdot \vec{u}_{BA} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \vec{u}_{BA} \qquad (9.7.5)$$

مثال:



$E = 24 \times 10^6 \; psi$

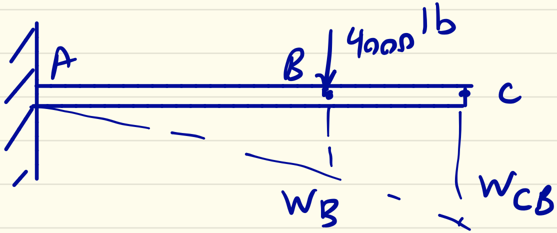
$I = 120 \; in^4$

$L = 12 \; ft$

جابجایی نقطه B را بیابید:

می دانیم:

$$w_{BC} = w_{CB}$$

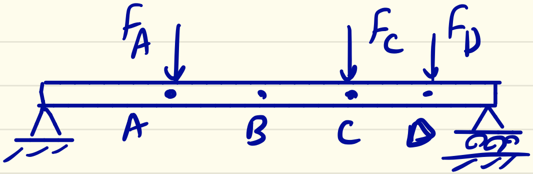


$$w_B = \frac{FL^3}{3EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{FL^2}{2EI}$$

$$w_{BC} = w_{CB} = w_B + \theta_B (3 \times 12)$$

$$= \frac{4000\,(9 \times 12)^3}{3EI} + \frac{(3 \times 12) \times 4000 \times (9 \times 12)^2}{2EI} = 0.8748 \; in$$

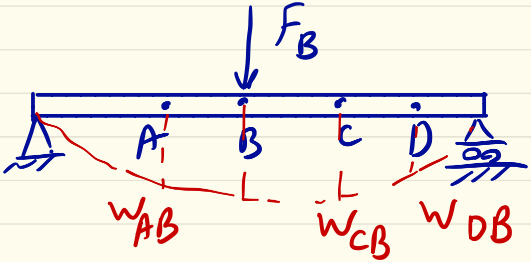
مثال:



مطلوب جابجائی نقطه B در اثر اعمال

بارهای F_A و F_C و F_D .

با استفاده از تئوری ماکسول می توان گفت:



$$W_B = \left(\frac{W_{AB}}{F_B}\right) F_A + \left(\frac{W_{CB}}{F_B}\right) F_C + \left(\frac{W_{DB}}{F_B}\right) F_D$$