بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۲۳

9.7 Principle of Virtual Force and Complementary Potential Energy

در این قسمت از انرژی پتانسیل مکمل برای حل مسائل استفاده می‌کنیم.

در نظر بگیرید به یک جسم در حال تعادل نیروهای مجازی $\delta \vec{f}$ وارد کرده‌ایم که منجر به ایجاد میدان تنش مجازی $\delta \overleftrightarrow{\sigma}$ می‌شود.

خود این نیروهای مجازی باید در حال تعادل باشند:

$$\nabla \cdot \delta \overleftrightarrow{\sigma} + \delta \vec{f} = 0 \quad \text{on } V \qquad (9.7\text{-}1)$$

تعادل جسم

$$\vec{n} \cdot \delta \overleftrightarrow{\sigma} = \delta \vec{t} \quad \text{on } S_2 \qquad (9.7\text{-}2)$$

$\delta \vec{t}$: نیروهای خارجی اعمال شده در مرز

به چنین میدان تنشی تغییرات ممکن تنش استاتیکی می‌گوییم:

statically admissible field of stress variation

که کاملاً دلخواه‌اند در ربطی به تنش و تغییرمکان‌های واقعی ندارد.
کار مجازی مکمل خارجی چنین بیان می‌شود:

$$\delta W_E^* = -\int_V \bar{u} \cdot \delta \vec{f} \, dV - \int_{S_1} \bar{u} \cdot \delta \vec{t} \, ds \qquad (9.7\text{-}3)$$

که $\bar{u}$ جابجایی‌های واقعی است. همچنین

$$\delta W_I^* = \int_V \overleftrightarrow{\varepsilon} : \delta \overleftrightarrow{\sigma} \, dV \qquad (9.7\text{-}4)$$

اصل کار مجازی مکمل (یا نیروی مجازی) بیان می‌کند که کرنش‌ها و جابجایی‌ها در جسم تغییرشکل داده‌شده، سازگار و هماهنگ با قیدها هستند اگر و تنها اگر کل کار مجازی مکمل صفر باشد

$$\delta W_I^* + \delta W_E^* = 0 \qquad (9.7\text{-}5)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_V \varepsilon_{ij}\,\delta\sigma_{ij}\,dv - \int_V u_i\,\delta f_i\,dv - \int_{S_1} \hat{u}_i\,\delta t_i\,ds$$

$$= \int_V \varepsilon_{ij}\,\delta\sigma_{ij}\,dv - \int_V u_i\left(-\delta\sigma_{ij,j}\right)dv - \int_{S_1} \hat{u}_i\, n_j\,\delta\sigma_{ij}\,ds$$

$$= \int_V \left[\tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \varepsilon_{ij}\right]\delta\sigma_{ij}\,dv + \int_{S_1} \left(u_i - \hat{u}_i\right) n_j\,\delta\sigma_{ij}\,ds \qquad (9.7\text{-}6)$$

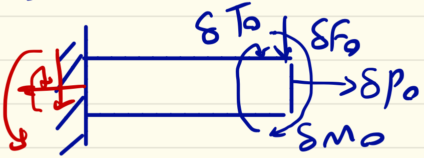
تکرار در اندیس به معنی جمع نیست.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = 0 & \text{in } V \qquad (9.7\text{-}7) \\ u_i - \hat{u}_i = 0 & \text{on } S_1 \qquad (9.7\text{-}8) \end{cases}$$

روش نیروی واحد مجازی حالت خاصی از کار مجازی مکمل است که بر روی مواد الاستیک خطی قابل اجرا باشد. اگر u_0 جابجایی واقعی در نقطه o باشد و δR_0 نیروی مجازی در آن نقطه باشد و همچنین $\delta\sigma_{ij}^{0}$ تنش حاصل از این نیروی مجازی باشد که معادلات تعادل را ارضا می‌کند، از اصل کار مجازی مکمل داریم:

$$u_0\,\delta R_0 = \int_V \varepsilon_{ij}\,\delta\sigma_{ij}^{0}\,dV \qquad (9.7.9)$$

با در نظر گرفتن $\delta R_0 = 1$ و یافتن تنش معادل با چنین نیرویی می‌توان به صورت مستقیم u_0 را یافت.



به طور مثال برای تیر اویلر برنولی داریم:

نیروی برشی

$$u_0\,\delta P_0 + w_0\,\delta F_0 + \theta_0\,\delta M_0 + \phi_0\,\delta T_0 + 0 = \int_0^L \left(\frac{N}{EA}\delta N + \frac{M}{EI}\delta M + f_s\frac{V}{GA}\delta V + \frac{T}{GJ}\delta T\right)dx \qquad (9.7.11)$$

که مقادیر δT_0 ، δM_0 ، δW_0 و δP_0 ، Generalized Coordinats هستند.

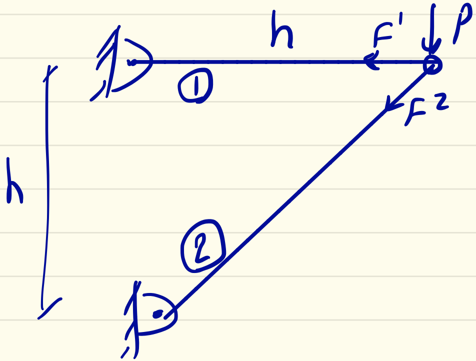
$$\sigma(\delta P_0, \delta F_0, \delta M_0, \delta T_0)$$

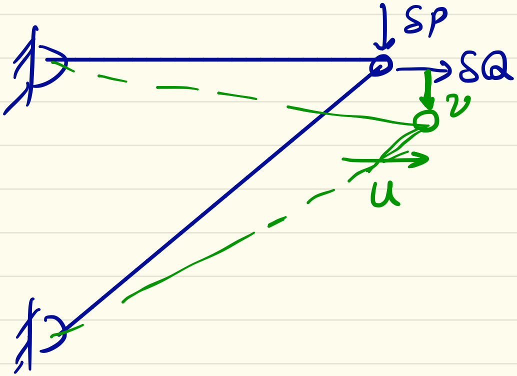
$$\int F(t, q_i, \dot{q}_i)$$

q_i ← Generalized Coordinats

f_s : ضریب شکل برای نیروی برشی.

مثال: جابجائی عمودی و افقی نقطه O را با استفاده از روش اصل کار مجازی مکمل پیدا کنید.





$A_1 = A_2 = A$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F^1 + F^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F^2\frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

$$u\cdot\delta Q+v\,\delta P=\int_V \varepsilon_{ij}\,\delta\sigma_{ij}\,dV=\sum_{i=1}^{2}\int_0^{h_i}A^{(i)}\,\varepsilon_{11}^{(i)}\,\delta\sigma_{11}^{(i)}\,dx \qquad (a)$$

$$F^{(1)}=P\ ,\quad F^{(2)}=-\sqrt{2}\,P\ ,\quad \sigma_{11}^{(1)}=\frac{P}{A}\ ,\quad \sigma_{11}^{(2)}=-\frac{\sqrt{2}\,P}{A} \qquad (b)$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_{11}^{(1)}=\frac{P}{EA}\ ,\qquad \varepsilon_{11}^{(2)}=-\frac{\sqrt{2}\,P}{EA} \qquad (c)$$

نیروهای مجازی:

$$\delta F^{(1)}=\delta P+\delta Q\ ,\qquad \delta F^{(2)}=-\sqrt{2}\,\delta P \qquad (d)$$

$$\delta\sigma_{11}^{(1)}=\frac{\delta P+\delta Q}{A}\ ,\qquad \delta\sigma_{11}^{(2)}=-\frac{\sqrt{2}\,\delta P}{A} \qquad (e)$$

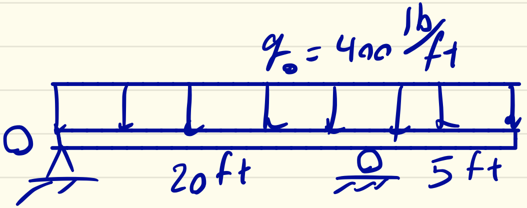
از اصل کار مجازی مکمل داریم:

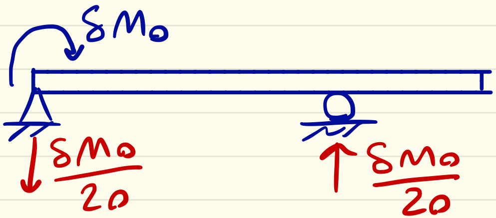
$$\delta Q\cdot u+\delta P\cdot v=Ah\,\frac{\delta Q+\delta P}{A}\cdot\frac{P}{EA}+\sqrt{2}\,Ah\,\frac{\sqrt{2}\,\delta P}{A}\,\frac{\sqrt{2}\,P}{EA} \qquad (f)$$

ضرایب δQ و δP در طرفین باید برابر باشند:

$$u = \frac{Ph}{EA} \quad , \quad v = \frac{Ph}{EA} + 2\sqrt{2}\,\frac{Ph}{EA} = \frac{Ph}{EA}\left(1+2\sqrt{2}\right) \qquad (۹)$$

مثال: با استفاده از روش بار مجازی واحد، شیب انتهای سمت چپ را بیابید.





از تعادل نیروهای مجازی نتیجه می‌شود که نیروی مجازی $\frac{\delta m_0}{20}$ در تکیه‌گاه‌ها وارد می‌شود.

$$\theta_O \cdot \delta M_O = \frac{1}{EI}\int_0^L M(x)\,\delta m^0(x)\,dx \qquad (۸)$$

که $M(x)$ ممان خمشی واقعی و $\delta m^0(x)$ ممان خمشی مجازی می‌باشند.

$$M(x)=\begin{cases}3750x-200x^2 & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 3750x-200x^2+6250(x-20) & 20\leqslant x\leqslant 25\end{cases}\qquad (b$$

$$\delta M^0(x)=\begin{cases}\delta m_0-\left(\frac{1}{20}\delta m^0\right)x & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0 & 20\leqslant x\leqslant 25\end{cases}\qquad (c$$

از جایگزاری b) و c) در رابطه a) داریم: $(\delta m^0=1)$

$$\theta_0=\frac{1}{EI}\int_0^{20}(3750x-200x^2-127.5x^2+10x^3)\,dx=-\frac{7\times10^5}{6EI}\qquad (d$$

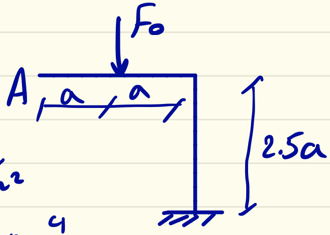
مثال: جابجائی افقی و قائم نقطه A را بیابید:

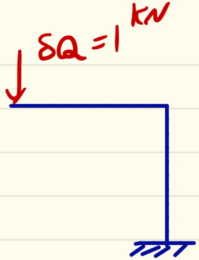
$F_0 = 50^{kN}$

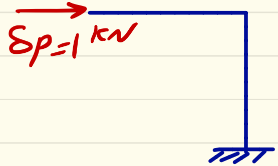
$a = 2^m$

$E = 200 \times 10^6 \, kN/m^2$

$I = 200 \times 10^6 \quad mm^4$







تعادل حاصل از δQ را در شکل (b) می‌توان دید

$$\delta Q \cdot v = \int \frac{M}{EI}\, \delta m \, dx \qquad (a)$$

$$1 \cdot v = \int_0^a \frac{0}{EI}(x)\,dx + \int_0^a \frac{F_0 x}{EI}(a+x)\,dx + \int_0^{2.5a} \frac{F_0 a}{EI}(2a)\,dx \qquad (b)$$

$$= \frac{5F_0a^3}{6EI} + 5\frac{F_0a^3}{EI} = \frac{35F_0a^3}{6EI} = 0.0583^m$$

حال $\delta P = 1$ را در نقطه A اعمال می‌کنیم:

$$\delta P \cdot u = \int \frac{M}{EI}\, \delta m \, dx \qquad (c)$$

$$1 \cdot u = \int_0^a \frac{0}{EI}(0)\,dx + \int_0^a \frac{F_0 x}{EI}(0)\,dx + \int_0^{2.5a} \frac{F_0 a}{EI}(-x)\,dx \qquad (d)$$

$$= -\frac{3.125 F_0 a^3}{EI} = -0.0313\ m$$ راه)

علامت منفی یعنی در خلاف جهت فرض شده حرکت صورت می‌گیرد.