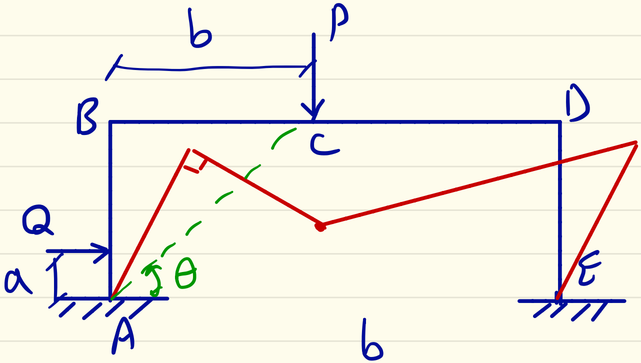
بسم الله الرحمن الرحیم

ضربه

جلسه ۲۲

۶-۴ لولاهای پلاستیکی در قاب‌ها



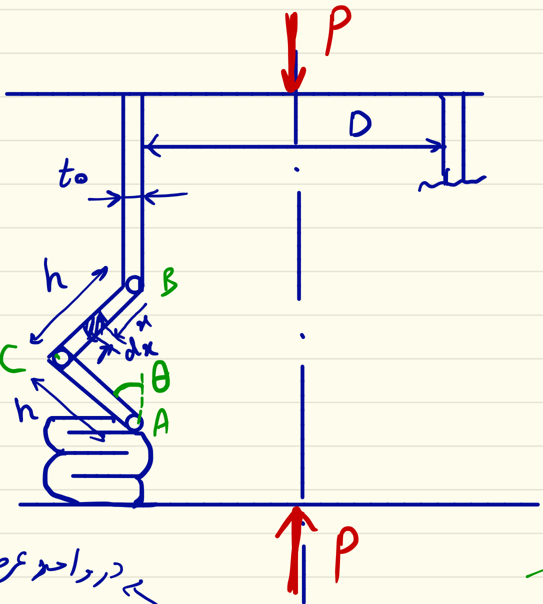
اگر شکل فروریزش به گونه‌ای باشد که نشان داده شده است داریم:

لولاها: A, C, D, E

$$Qa\omega + P(\overbrace{AC\cdot\cos\theta}^{b})\omega = \underbrace{\omega M_p}_{(A)} + \underbrace{2\omega M_p}_{(C)} + \underbrace{2\omega M_p}_{(D)} + \underbrace{\omega M_p}_{(E)}$$

$$\Rightarrow \quad Qa + Pb = 6M_p$$

6-5 - خرد و ریزش یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک دارای بار محوری



با چین خوردن بدنه استوانه، به دو روش انرژی مستهلک می‌شود:

الف- انرژی مستهلک شده در اثر خمش پلاستیک W_B

ب- انرژی مصرف شده برای کشیدگی بدنه W_s

(بدنه را صلب - پلاستیک کامل در نظر می‌گیریم)

در واحد عرض

$$W_B = \underbrace{2M_p \cdot \pi D \cdot \frac{\pi}{2}}_{A,B} + \overbrace{2M_p \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(D+2h\sin\theta)\,d\theta}^{C}$$

$$= 2M_p \pi^2 D + 2M_p \pi \left(\frac{\pi D}{2} + 2h\right) = 2M_p \pi(\pi D + 2h) \qquad (a)$$

اگر معیار تسلیم فون مایسز استفاده شود داریم:

$$\left(M_p = \frac{h^2 S_y}{4}\right) \Rightarrow \quad M_p = 2 S_y \frac{t_0^2}{4\sqrt{3}}$$

اما داریم:

$$W_s = 2\int_0^h S_y \underbrace{\pi D t_0 \, dx}_{\text{حجم}} \; \underbrace{\ln\left(\frac{D+2x\sin\theta}{D}\right)}_{\text{کرنش}} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\simeq 2 S_y \int_0^h \pi D t_0 \frac{2x}{D} \, dx = 2 S_y \pi t_0 h^2 \qquad (b)$$

عبارتهای (b) و (a) با فرض ثابت ماندن h و فرض اینکه بین کشش و خمش اندرکنش وجود ندارد صحیح است.

اما اتلاف انرژی برابر با کار انجام شده توسط نیروی P می باشد. یعنی

$$p \cdot 2h = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{S_y t_0^2}{4}\right)\pi(\pi D + 2h) + 2 S_y \pi t_0 h^2$$

$$\Rightarrow \quad P/S_y = \frac{\pi t_0^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi D}{2h} + 1\right) + \pi h t_0 \qquad (6-7)$$

حال می‌توان مقدار h را با مینیمم کردن P/S_y نسبت به h یافت

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{P}{S_y}\right) = \frac{\pi t_0^2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi D}{2h^2}\right) + \pi t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^{1/2}(D t_0) \simeq 0.95\,(D t_0)^{1/2} \qquad (6-8)$$

$$\Rightarrow \quad P/S_y \simeq 6 t_0 (D t_0)^{1/2} + 1.8 t_0^2 \qquad (6-9a)$$

این رابطه برای حالت چین خوردن رو به بیرون است

$$P/S_y \simeq 6 t_0 (D t_0)^{1/2} - 1.8 t_0^2 \qquad (6-9b)$$

" " داخل

درعمل چین خوردگی بین دو حالت فوق اتفاق می افتد. پس مقدار متوسط آنها در نظر گرفته می شود

$$P/S_y = 6 t_0 (D t_0)^{1/2} \qquad (6\text{-}9c)$$

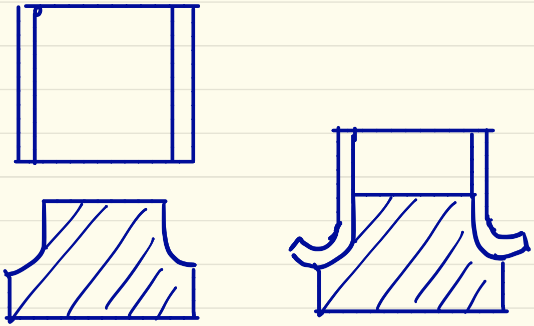
اگر لوله با سرعت اولیه v به سطح برخورد کند و یا جسمی با جرم M با سرعت اولیه به لوله برخورد کند و بار را ثابت در نظر بگیریم، طول قسمت خسارت دیده چنین است:

$$P \cdot x = \tfrac{1}{2} M v^2 \longrightarrow x = \frac{M v^2}{12 S_y t_0 \sqrt{D t_0}}$$

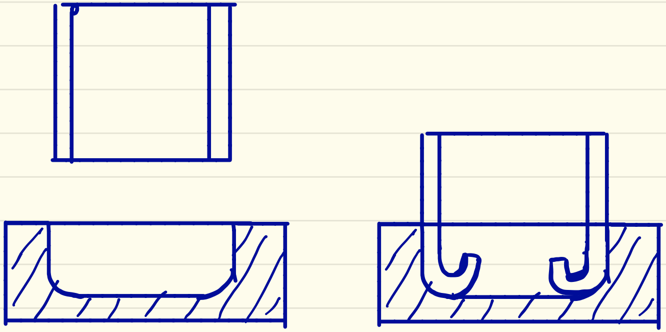
اگر $M = \rho \pi D t_0 l$ (جرم خود استوانه)

$$\frac{x}{l} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{D}{t_0}} \left(\frac{\rho v}{S_y}\right)^2 \qquad (6\text{-}10)$$

6-6 . وارونگی لوله‌ها در اثر بار محوری



(a)



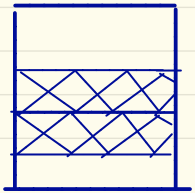
(b)

حالتهائی که در اثر ضربه محوری ممکن است در لوله اتفاق بیافتد:

۱- کمانش ستونی یا کمانش اویلر

۲- کمانش متقارن محوری یا چین دار شدن

۳- کمانش الماسی



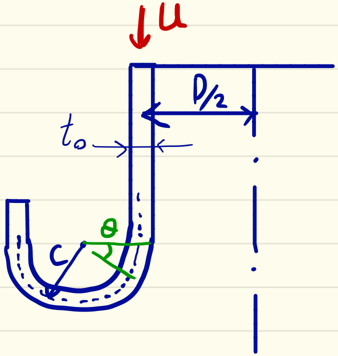
۴ـ پارگی لوله

۵ـ فشردگی یکنواخت در لوله

برای وارونگی به خارج دو عامل باعث اتلاف انرژی می‌شود:

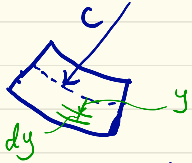
الف ـ خمیده شدن و بازشدن لوله

ب ـ زیاد شدن قطر لوله



c : شعاع وارونگی

t_0 : ضخامت دیواره استوانه



المان لوله

U : سرعت یکنواخت لوله

W_B : کار انجام شده در واحد زمان برای خمش یک المان لوله

W_E : کار انجام شده در واحد زمان برای کشیدگی المان‌های لوله

$$w_B \simeq \underset{\text{دوبار خم شده است}}{2} \int_0^{t_0/2} (\pi D\, dy\, u)\, S_y \left(\frac{y\theta}{C\theta}\right) = \frac{\pi D t_0^2 u}{4C} \cdot S_y \qquad (a)$$

این رابطه خمش لوله است که با بازشدن لوله مساوی فرض شده است.

$$w_E = (\pi D t_0 u)\, S_y \underbrace{\ln\left(1+\frac{2C}{D/2}\right)}_{\text{کرنش الحاق}} \simeq 4\pi t_0 C S_y u \qquad (b)$$

اگر $4C/D$ کوچک باشد می‌توان گفت:

$$\ln\left(1+\frac{2C}{D/2}\right) \simeq \frac{4C}{D}$$

$$\Rightarrow P u = \underset{\text{دوبار خم شدن}}{2} w_B + w_E = \pi t_0 S_y \left[\frac{D t_0}{2C} + 4C\right] u$$

$$\Rightarrow P = \pi t_0 S_y \left[\frac{D t_0}{2C} + 4C\right] \qquad (6\text{-}11)$$

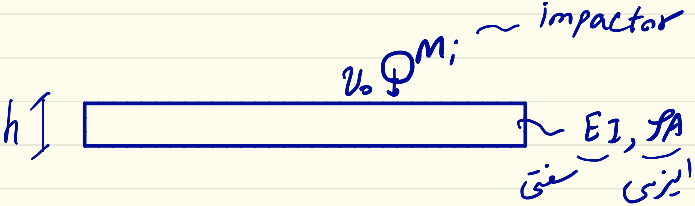
شعاع c با مینیمم کردن P نسبت به c بدست می آید که می شود:

$$c = \sqrt{\frac{D t_0}{8}} \qquad (6-12)$$

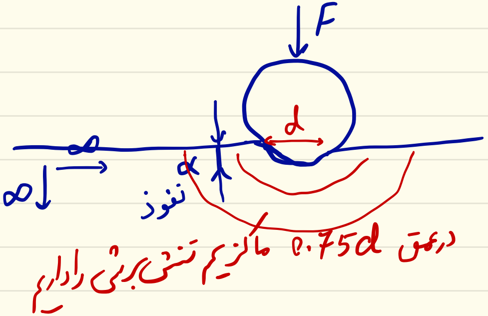
$$\Rightarrow \quad P = \pi t_0 S_y (8 D t_0)^{1/2} \qquad (6-13)$$

فصل هشتم: ضربه عرضی   Transverse Impact

مبحث این فصل مربوط می‌شود به برخورد یک جرم ضربه زننده به یک سازه تیرگون (یا ورق و پوسته)
(سازه نازک)



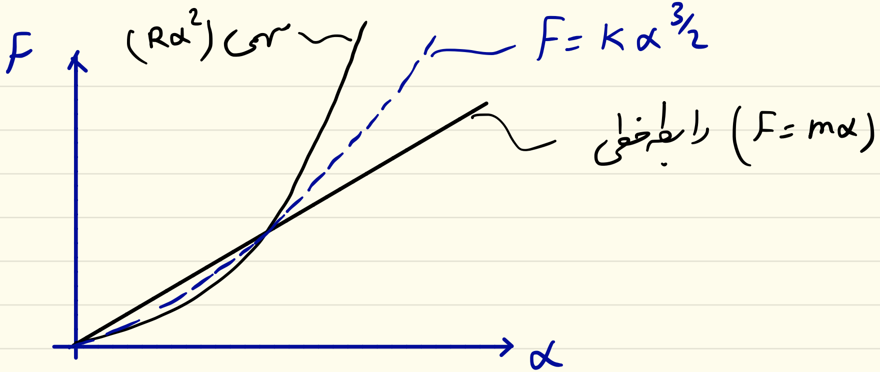
8.1 - مکانیک تماس بین اجزاء الاستیک   Contact Mechanics



$$F = K\alpha^n$$

k, n بسته به متریال‌های مختلف دارد

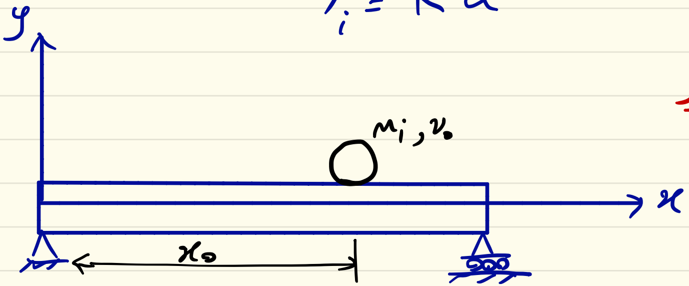
و تجربی به دست می‌آید. $(\alpha \ll 1)$

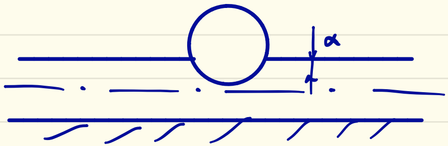


در تجربه معادله‌ای که به آن رسیده‌اند چنین است

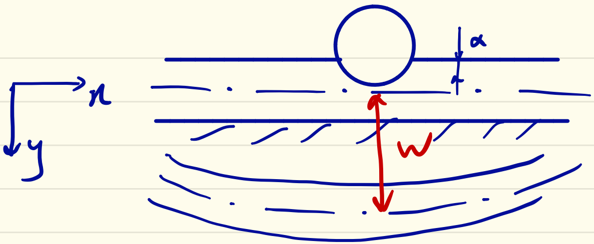
$$F_i = K\alpha^{3/2} \qquad (8\text{-}1)$$

8-2 - ترکیب برخورد عرضی و جابجائی تیر





اگر فرض کنیم تیر اصلاً جابجا نمی‌شود ولی را هم ملحوظ کردیم



حال اگر فرض کنیم تیر خیزبری دارد

جابجایی جسم $\quad y(t) = w(t) + \alpha(t) \qquad (a)$

البته $\alpha << w$ است.

$$\longrightarrow \quad \ddot{y}(t) = \ddot{w}(t) + \ddot{\alpha}(t) \qquad (b)$$

$$\Sigma F_y = m_i\, \ddot{y}(t)$$ (وزن صرفنظر می‌شود)

$$-k\,\alpha^{3/2} = m_i\, \ddot{y}(t)$$

$$\xrightarrow{a} \quad m_i\left(\ddot{w}(t) + \ddot{\alpha}(t)\right) = -k\,\alpha^{3/2}(t) \qquad (8\text{-}2)$$

دیده می‌شود که بخاطر توان $3/2$ معادله فوق غیرخطی است. w هم خیز تیر در نقطه x_0 است.

$$w(x_0, t) = \tilde{w}(t) \qquad (c)$$

اما معادله حاکم بر تیر (اویلر برنولی) نیز برای خیز وجود دارد:

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, t) \qquad (d)$$

بار گسترده روی تیر

اما اینجا بار متمرکز داریم:

$$p(x,t) = F_i \, \overbrace{\delta(x-x_0)}^{\text{تابع دیراک}}$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_i \, \delta(x-x_0) \qquad (8-3)$$

در معادله (8-2) و (8-3) را باید همزمان حل کرد. معادله (2) ODE است و (3) PDE
است و حل همزمان آن احتیاج به روش خاص دارد. برای این موضوع با جداسازی متغیرها
امکان پذیر است:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\phi_i(t)}_{\text{زمانی}} \; \underbrace{\psi_i(x)}_{\text{مکانی (با توجه به شرایط مرزی)}} \qquad (8-4)$$

مثلاً برای دو سر SS:
(e)

$$\psi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

خیلی از مواقع با انتخاب یک یا ۲ یا ۳ جمله می‌توان جواب را یافت

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$w(x,t)=\phi(t)\,\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \qquad (f)$$

مثلاً برای حل PDE از روش باقیمانده وزنی گلرکین استفاده می‌کنیم

$$\int_0^{\ell} \underbrace{\left\{EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-F_i\,\delta(x-x_0)\right]}_{\text{باقیمانده معادله PDE}}\;\underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)}_{\text{تابع وزن که تابع شکل است}\ (\psi(x))}dx=0 \qquad (8\text{-}5)$$

$$\overset{(f)}{\Rightarrow}\int_0^{\ell}\left[EI\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\phi(t)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)+\rho A\,\ddot{\phi}(t)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)-K\alpha^{3/2}\,\delta(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)dx \qquad (g)$$

معادله فوق یک معادله ODE است

(8-6)

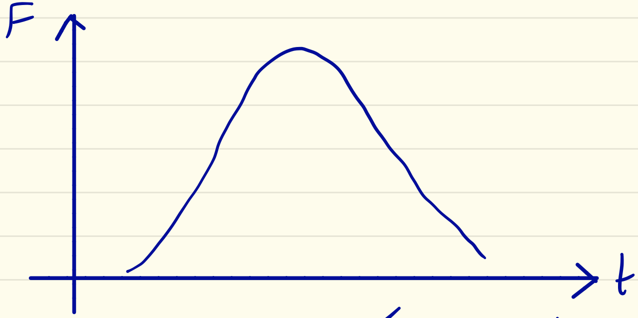
$$\boxed{EI\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\left(\frac{\ell}{2}\right)\phi(t)+\rho A\,\ddot{\phi}(t)\left(\frac{\ell}{2}\right)-K\alpha^{3/2}\sin\left(\frac{\pi x_0}{\ell}\right)=0}$$

$$\xrightarrow[x=x_0]{(8\text{-}2),(f)}\boxed{M_i\left[\ddot{\phi}\,\sin\left(\frac{\pi x_0}{\ell}\right)+\ddot{\alpha}\right]=-K\alpha^{3/2}} \qquad (8\text{-}7)$$

دو معادله 6 و 7 دو ODE هستند که می‌توان آنها را همزمان حل کرد و α و ϕ را یافت

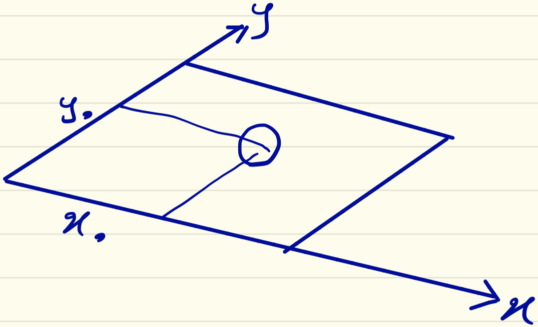
(خطی)

با داشتن $\Phi(t)$ فنر تیر بدست می‌آید و با داشتن $\alpha(t)$ نیروی ضربه بدست می‌آید.



$$\dot{\alpha}(t=0)=v_0$$
$$y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$$

برای ورق نیز همین روش را می‌توان بکار بست که معادله حاکم آن دو بعدی است:



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{P(x,y,t)}{D} \qquad (h)$$