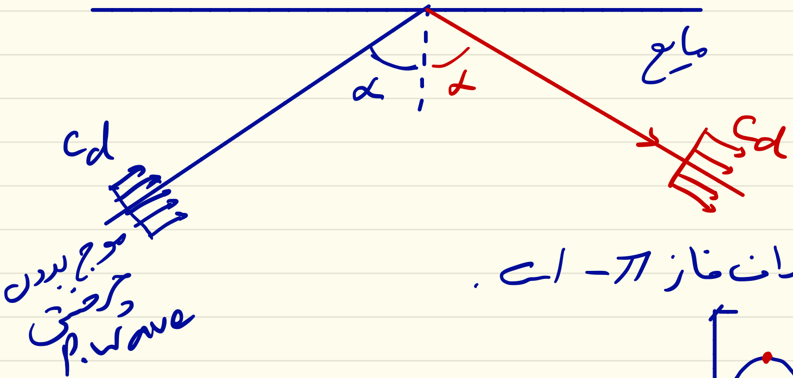
بسم الله الرحمن الرحیم   ضرب   جلسه ۱۸

۶-۴ - بازتاب و شکست موجها در یک سطح مشترک

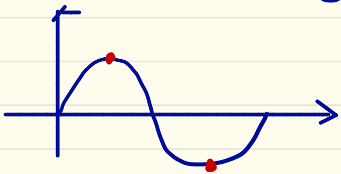
① سطح مشترک مایع خلاء

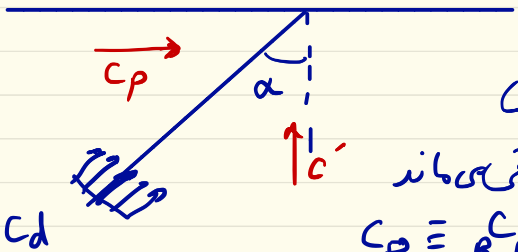


p. wave بدون چرخش $c_d=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}$

s.wave (امواج حجم تاب) $c_t=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

موج منعکس شده بدون چرخش و با اختلاف فاز $-\pi$ است.



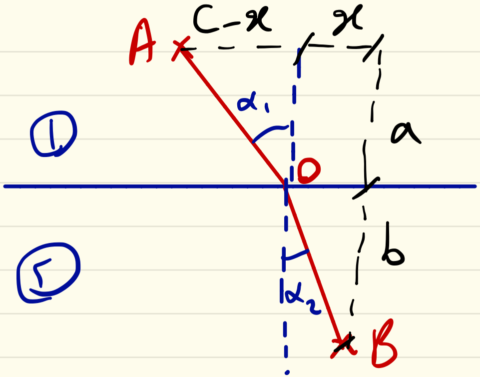


c_p : سرعت نمود یا سرعت ظاهری

c_p در برخورد موج با سطح مشترک ثابت باقی می‌ماند

$$c_p \equiv {}_{B}c_{p} = \frac{c_d}{\sin\alpha}$$

رابطه اسنل - دکارت (snell law)



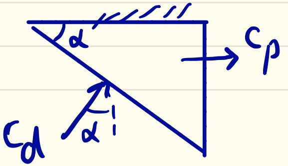
اصل فرما بیان می‌کند که نور در عبور از سطح مشترک بین دو جسم به گونه‌ای حرکت می‌کند که زمان لازم برای طی مسیر اکسترمال باشد.

$$t = \frac{OA}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{1}{c_1}\sqrt{a^2+(c-x)^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{b^2+x^2} \qquad (a$$

سرعت موج

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-(c-x)}{c_1\sqrt{a^2+(c-x)^2}} + \frac{x}{c_2\sqrt{b^2+x^2}} = 0 \qquad (b$$

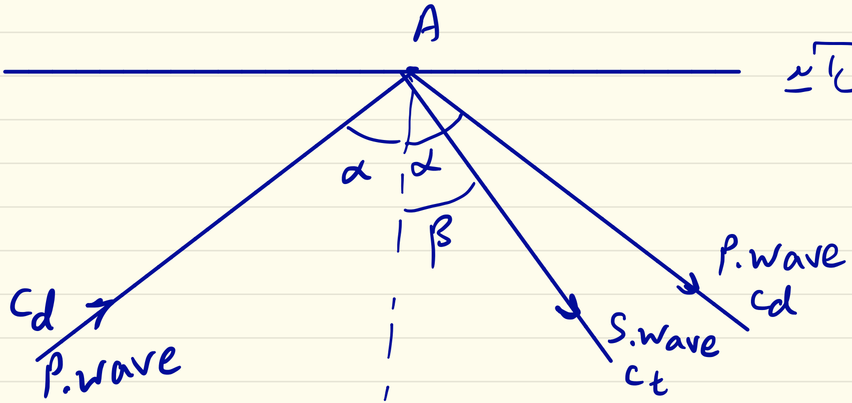
$$\Rightarrow \frac{c-x}{c_1\sqrt{a^2+(c-x)^2}} = \frac{x}{c_2\sqrt{b^2+x^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2}}$$



$$c_p(a\sin\alpha) = c_d \cdot a \longrightarrow c_p = \frac{c_d}{\sin\alpha}$$

۲) سطح مشترک جامد ـ خلاء

الف ـ موج ورودی بدون چرخش باشد:



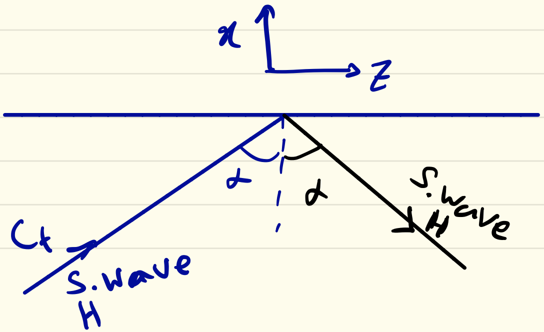
چون در نقطه A یک آشفتگی بوجود می‌آید

باعث ایجاد دو موج P و S می‌شود.

$$\text{ثابت}_B\ C_P = \frac{c_d}{\sin\alpha} = \frac{c_t}{\sin\beta} \qquad (4\text{-}22)$$

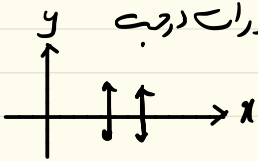
ب ـ موج ورودی حجم ثابت باشد

a ـ قطبی شده افقی (SH)

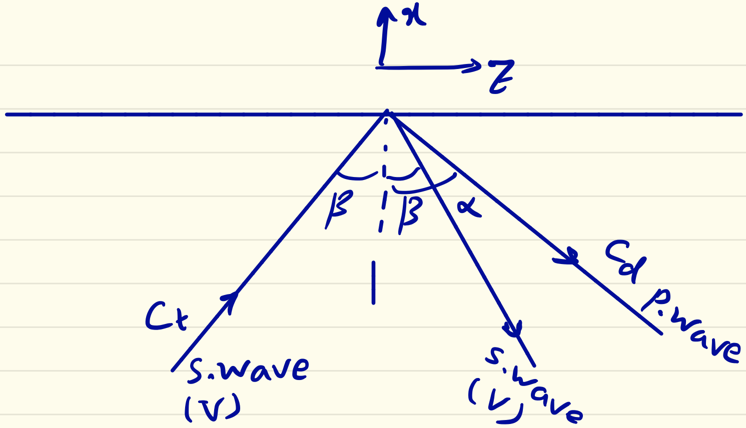


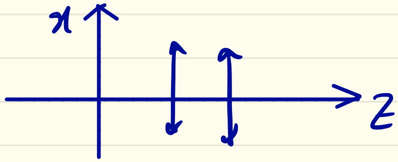
در این حالت حرکت ذرات در جهت

محور y ها صورت می‌گیرد



b ـ قطبی شده قائم (S.V)





$$_{B}C_p = \frac{C_t}{\sin\beta} = \frac{C_d}{\sin\alpha}$$

۳) سطح مشترک جامد ـ جامد

شروط پیوستگی و تعادل در سطح مشترک:

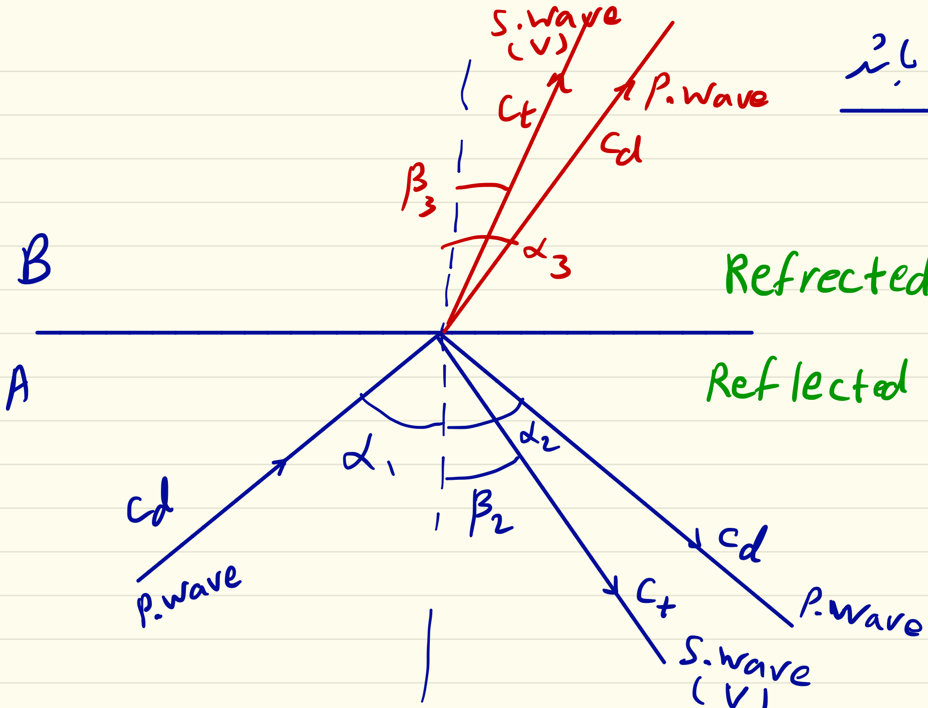
۱ـ تغییر مکان های قائم برابر است

۲ـ تغییر مکان های مماسی برابر است

۳ـ تنش های قائم برابر هستند

۴ـ تنش های برشی برابر هستند.

الف ـ موج ورودی بدون چرخش باشد

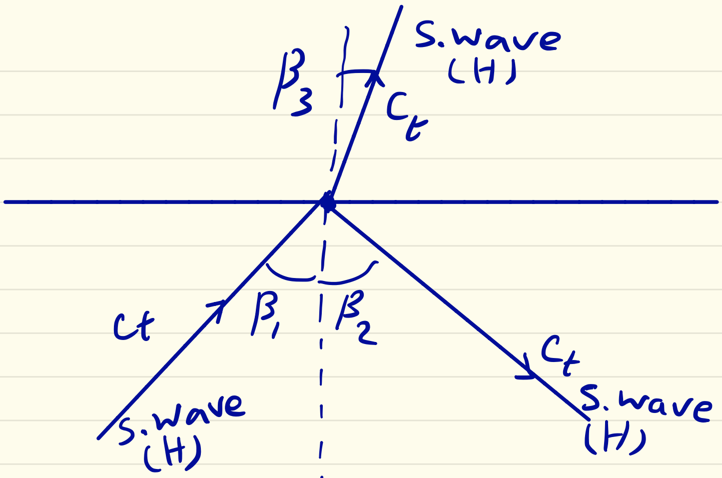


Refrected
$$\frac{\sin\alpha_1}{C_{dA}} = \frac{\sin\alpha_2}{C_{dA}} = \frac{\sin\beta_2}{C_{tA}}$$

Reflected
$$\frac{\sin\alpha_1}{C_{dA}} = \frac{\sin\alpha_3}{C_{dB}} = \frac{\sin\beta_3}{C_{tB}} \qquad (4\text{-}23)$$

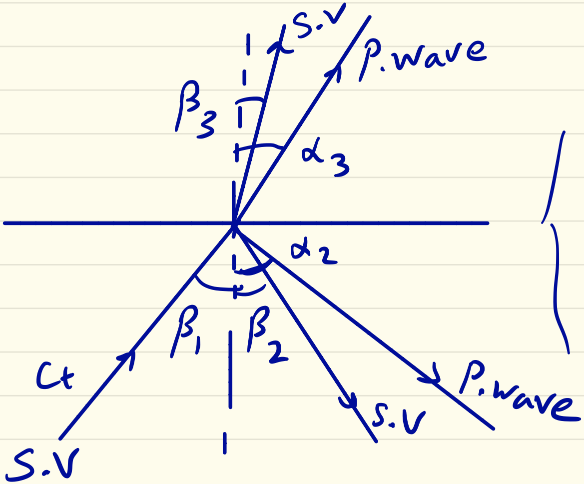
ب ـ موج ورودی حجم S باشد:

a ـ قطبی شده افقی S.H



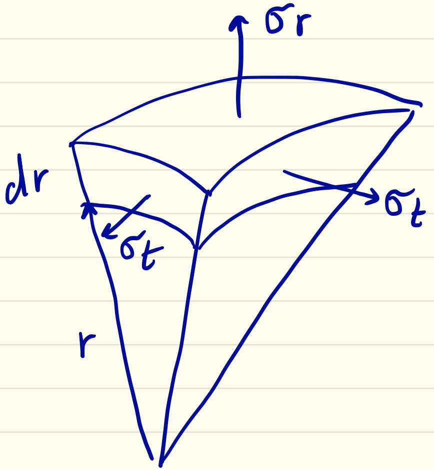
$$\frac{\sin\beta_1}{C_{tA}} = \frac{\sin\beta_2}{C_{tA}} = \frac{\sin\beta_3}{C_{tB}} \quad (4-24)$$

b ـ قطبی شده ـ قائم (S.V)



$$\begin{cases} \dfrac{\sin\beta_1}{C_{tA}} = \dfrac{\sin\beta_2}{C_{tA}} = \dfrac{\sin\alpha_2}{C_{dA}} \\[2ex] \dfrac{\sin\beta_1}{C_{tA}} = \dfrac{\sin\beta_3}{C_{tB}} = \dfrac{\sin\alpha_3}{C_{dA}} \end{cases}$$

4-7 ـ موج‌های متقارن کروی در یک محیط بی‌نهایت



فرض می‌شود یک موج کروی بصورت متقارن شروع به انتشار می‌کند:

معادله حرکت:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(\sigma_r - \sigma_t\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (a)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{و} \quad \varepsilon_t \left(\equiv \varepsilon_\theta\right) = \frac{u}{r} \qquad (b)$$

روابط هوک

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu\frac{u}{r}\right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{u}{r} + \nu\frac{\partial u}{\partial r}\right] \end{aligned}\right. \qquad (c)$$

$$\xrightarrow{(a)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (d)$$

تابع ϕ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (e)$$

$$\xrightarrow{(d)} \quad \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)\right] = \frac{1}{c_d^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (f)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = F(t) \qquad (g)$$

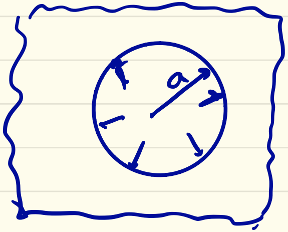
$F(t)$ غیرصفر یک جواب خصوصی برای $\phi(t)$ می‌دهد که در معادله موج تاثیری ندارد:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) = c_d^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)} \qquad (4-25)$$

جواب: $\quad r\phi = f(r - c_d t) + F(r + c_d t) \qquad (4-26)$

4-8 - موج فشاری انفجار در یک حفره کروی

در این بخش به عنوان نمونه از تحلیل سه بعدی ضربه، فشار حاصل از انفجار در یک حفره کروی که حالت خاص تحلیل بخش قبل می باشد بیان می شود



$$(4\text{-}26) \Rightarrow \quad r\phi = f(r - c_d t)$$

شرایط اولیه: در $t=0$ سرعت در همه جا صفر است.

شرایط مرزی: $\sigma_r(a) = P(t) \qquad t>0$

بجای رابطه (4-26) از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{1}{r} f(T) \\ T = t - \dfrac{1}{c_d}(r-a) \end{cases} \qquad (a)$$

مزیت این کار این است که: در $r=a$ داریم $T=t$

$$\Rightarrow \quad f' = \frac{d}{dT} f(T) \qquad (b)$$

$$\xrightarrow{u = \frac{\partial \phi}{\partial r}} \quad u = -\frac{1}{c_d} \cdot \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f$$

$$\xrightarrow[\text{بخش قبل}]{\text{رابطه (c)}} \quad \frac{1}{\rho c_d^2}(1-\nu)\sigma_r = (1-\nu)\frac{1}{c_d^2} \cdot \frac{1}{r} f'' + 2(1-2\nu)\left(\frac{1}{c_d} \cdot \frac{1}{r^2} f' + \frac{1}{r^3} f\right) \qquad (d)$$

$$\frac{1}{\rho c_d^2}(1-\nu)\sigma_\theta = \nu \frac{1}{c_d^2} \cdot \frac{1}{r} f'' - (1-2\nu)\left(\frac{1}{c_d} \cdot \frac{1}{r^2} f' + \frac{1}{r^3} f\right) \qquad (e)$$

B.C.: $\sigma_r(a) = P(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(t) + 2\gamma f'(t) + 2\gamma \dfrac{c_d}{a} f(t) = -\dfrac{a}{\rho} P(t) \\ \gamma = \dfrac{1-2\nu}{1-\nu} \dfrac{c_d}{a} \end{cases} \qquad (f)$$

معادله (f) یک معادله دیفرانسیل از نوع معادله زیر است

$$x''(t)+a_1 x'(t)+a_0 x(t)=F(t) \qquad (g)$$

که در آن a_1 و a_0 ثابت هستند. رابطه (g) معادله یک جرم و فنر در میرا است. حل کلی آن چنین است:

$$x(t)=\underbrace{\int_0^t F(\xi)\, g_1(t-\xi)\, d\xi}_{\text{جواب خصوصی}} + \underbrace{c_1 e^{\alpha t}+c_2 e^{\beta t}}_{\text{جواب عمومی}} \qquad (h)$$

α و β جواب معادله زیر هستند

$$z^2+a_1 z+a_0=0 \qquad (i)$$

در نتیجه جواب خصوصی $g_1(t)$ چنین بدست می آید

$$g_1(t)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right) \qquad (j)$$

c_1 و c_2 با شرایط مرزی بدست می آیند:

$$\text{B.C.:} \qquad g_1(0)=0 \quad و \quad g_1'(0)=1 \qquad (K)$$

پس جواب خصوصی چنین خواهد بود:

$$f(t) = -\frac{1}{\alpha-\beta}\,\frac{a}{\rho}\int_0^t p(\xi)\left[e^{\alpha(t-\xi)} - e^{\beta(t-\xi)}\right]d\xi \qquad (L)$$

که داریم

$$\alpha,\beta = \gamma(-1\pm is) \quad و \quad s=\sqrt{\frac{1}{1-2\nu}} \qquad (m)$$

s و γ اعداد مثبت حقیقی هستند و α و β مختلط هستند

ولی طرف راست رابطه (L) حقیقی است.

اما شرایط اولیه:

$$t=0,\ u=0 \xrightarrow{(c)} -\frac{1}{c_d}\frac{1}{r}f'\left(-\frac{r-a}{c_d}\right) - \frac{1}{r^2}f\left(\frac{r-a}{c_d}\right)=0 \qquad (n)$$

$t=0\ ,\ v=0$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{c_d}\cdot\frac{1}{r} f''(t) - \frac{1}{r^2} f'(t)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c_d}\cdot\frac{1}{r} f''\left(-\frac{r-a}{c_d}\right) - \frac{1}{r^2} f'\left(-\frac{r-a}{c_d}\right) = 0 \qquad (۵)$$

بطورمثال اگر $P(t)=P_0$ ، با بعد T نتای

$$f(T) = -\frac{P_0 a^2}{2e\gamma c_d}\left[1 - e^{-\gamma T}\left(\cos(\gamma S T) + \frac{1}{S}\sin(\gamma S T)\right)\right] \qquad (۶)$$