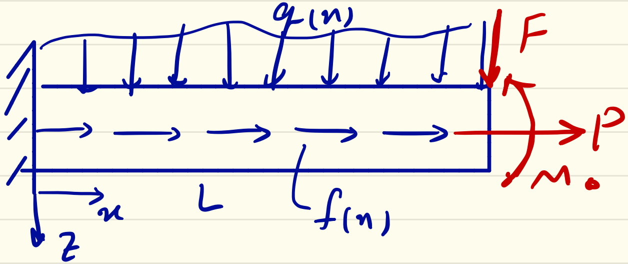
بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۲۲

هر دو اصل کار مجازی و مینیمم انرژی پتانسیل ، معادله تعادل را به عنوان معادله اویلر به ما می دهند (اگر روی حجم الاستیک اعمال شوند). ولی تفاوت اصلی این است که اصل کار مجازی معادله تعادل را بر حسب تنش یا منتجه های تنش می دهد در صورتیکه اصل مینیمم انرژی پتانسیل معادله تعادل را بر حسب جابجایی می دهد.

مثال:



$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EA\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 + EI\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)^2 \right] dx \qquad (a)$$

$$V = -\left[\int_0^L \left(f u_0 + q w_0(x) \right) dx + P u_0(L) + F w_0(L) + M_0 \left(-\frac{dw_0}{dx}\right)\Bigg|_{x=L} \right]$$

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EA\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 + EI\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)^2 - 2(f u_0 + q w_0) \right] dx$$

$$- \left[P u_0(L) + F w_0(L) - M_0 \left.\frac{dw_0}{dx}\right|_{x=L} \right] \qquad (c)$$

$$\delta \Pi = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^L \left(EA \frac{du_0}{dx}\frac{d\delta u_0}{dx} + EI \frac{d^2 w_0}{dx^2}\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \right) dx \qquad (d)$$

$$- \left[\int_0^L (f\,\delta u_0 + q\,\delta w_0)\,dx + P\,\delta u_0(L) + F\,\delta w_0(L) - M_0 \left.\frac{d\delta w_0}{dx}\right|_{x=L} \right]$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء

$$\delta u_0: \qquad -\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du_0}{dx}\right) - f(x) = 0 \qquad (e)$$

$$\delta w_0: \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) - q(x) = 0 \qquad (f)$$

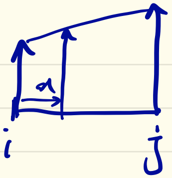
9.6 Castagiliano's Theorem I

مانند اصل جابجائی واحد مجازی که جابجائی یا نیروی یک نقطه را می داد (برای جسمی که گسسته سازی شده است) تئوری کاستاگلیانو نیز جابجائی و نیرو در نقطه را می دهد. تئوری کاستاگلیانو در حالت کلی برای جسم الاستیک (خطی یا غیرخطی) صادق است.

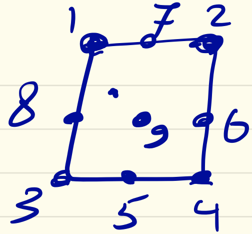
فرض کنید میدان جابجائی را بتوان برحسب جابجائی نقاط محدودی از جسم (nodes) نوشت:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \, \phi_i(x) \qquad (9.6\text{-}1)$$

که u_i ها پارامترهای نامعلوم جابجائی در نقاط هستند که به آن generalized displacement می گویند و ϕ_i ها توابع معلوم موقعیت هستند که به آنها interpolation function (یا توابع شکل) می گویند.



$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$



$$u(x,y) =$$

اصل مینیمم انرژی پتانسیل بیان می کند که

$$\delta U = -\delta V \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_i} \cdot \delta u_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i} \delta u_i$$

طبق تعریفی که از کار انجام شده توسط نیروهای خارجی داریم، می توان گفت:

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{u}_i} = -\vec{F}_i$$

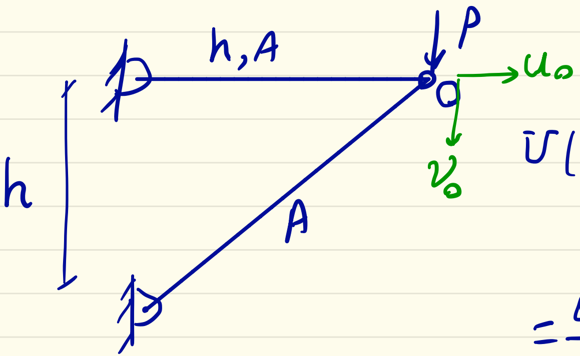
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i\right) \cdot \delta u_i = 0 \xrightarrow{\text{مستقل } \delta u_i} \boxed{\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i} \qquad (9.6-2)$$

رابطه (9.6-2) به تئوری اول کاستیلیانو معروف است. این تئوری

بیان می‌کند که برای یک جسم الاستیک نرخ تغییرات انرژی کرنشی برابر جابجایی در یک جهت،
برابر است با نیرویی که باعث بوجود آمدن آن جابجایی شده است (نیروی اعمال شده
در همان نقطه و در همان جهت).

در اصل این تئوری حالت خاصی از اصل مینیمم انرژی پتانسیل است و معادل اصل جابجایی
مجازی واحد می‌باشد.

مثال:



$$\bar{U}(u_0, v_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{V_i} E^{(i)}\left(\varepsilon^{(i)}\right)^2 dV$$

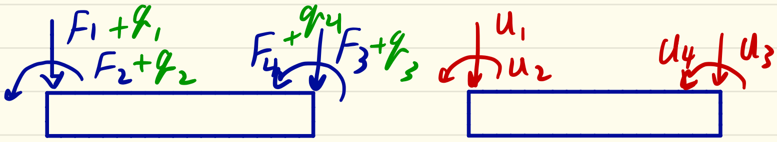
$$= \frac{EA}{2}\left[h\left(\frac{u_0}{h}\right)^2 + \sqrt{2}\,h\left(\frac{u_0-v_0}{2h}\right)^2\right]$$

بنابر تئوری کاستیلیانو:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial u_0} = EA\left(\frac{u_0}{h} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{u_0 - v_0}{2h}\right) \quad \Rightarrow u_0 = \frac{Ph}{EA}\ ,\ v_0 = (1+2\sqrt{2})\frac{Ph}{EA}$$

$$P = \frac{\partial U}{\partial v_0} = EA\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{u_0 - v_0}{2h}\right)$$

مثال: تیر دو سر آزاد زیر را در نظر بگیرید:



معادله حاکم برای تیر:

$$EI\left(\frac{d^4 w_0}{dx^4}\right) = 0 \qquad (a)$$

$$\Rightarrow \quad w_0(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \qquad (b)$$

a_i ها ثابت های انتگرال گیری هستند. ما مایل هستیم که a_i ها را برحسب

جابجائی و چرخش دو انتهای تیر بنویسیم.

$$\begin{cases} u_1 \equiv w_0(0) = a_1 \\ u_2 \equiv \left(-\dfrac{dw_0}{dx}\right)_{x=0} = -a_2 \\ u_3 \equiv w_0(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ u_4 \equiv \left(-\dfrac{dw_0}{dx}\right)_{x=L} = -a_2 - 2a_3 L - 3a_4 L^2 \end{cases} \qquad (c)$$

از حل این چهار معادله داریم:

$$w_0(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x) + u_3\phi_3(x) + u_4\phi_4(x) = \sum_{i=1}^{4} u_i\phi_i(x) \qquad (d)$$

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 1 - 3\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 \\ \phi_2(x) = -x\left[1 - 2\left(\dfrac{x}{L}\right) + \left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right] \\ \phi_3(x) = \left(\dfrac{x}{L}\right)^2\left(3 - 2\dfrac{x}{L}\right) \\ \phi_4(x) = x\dfrac{x}{L}\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) \end{cases} \qquad (e)$$

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\sum_{i=1}^{4} u_i \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{4} u_j \frac{d^2\phi_j}{dx^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} K_{ij}\, u_i u_j \qquad (f)$$

متقارن

کار نیروهای خارجی (پتانسیل خارجی)

$$V = -\left[\int_0^L q(x)\, \overset{\sum_{i=1}^{4} u_i\phi_i}{w_0(x)}\, dx + \sum_{i=1}^{4} F_i u_i\right] \qquad (g)$$

F_i : نیروهای خارجی روی نقاط گسسته سازی شده

$q(x)$: بار گسترده خارجی روی تیر

$$\Rightarrow \quad V = -\sum_{i=1}^{4} \left(q_i u_i + F_i u_i \right) \qquad (h)$$

که در آن

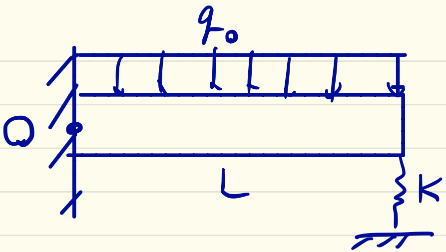
$$q_i = \int_0^L q(x)\, \phi_i(x)\, dx \qquad (i)$$

با استفاده از تئوری کاستیلیانو I می‌توان نوشت:

$$F_i + q_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{4} K_{ij} u_j \qquad (j)$$

$$\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ & 2L^2 & 3L & L^2 \\ & & 6 & 3L \\ sym & & & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$(k)$$



برای مثال در حالت خاص زیر داریم:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \\ 6 \\ L \end{Bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$F_3 = -F_s = -K\, w_0(L) = -K u_3$$

$$F_4 = 0$$

$$\xrightarrow{(K)} \begin{bmatrix} & & \\ & k_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \\ 6 \\ L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -K u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (\ell)$$

برای حل این معادله ماتریسی باید سطر و ستون مربوط به $u_1=u_2=0$ را حذف کرد؛

$$\frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix}6 & 3L\\ 3L & 2L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = \frac{q_0 L}{12}\begin{Bmatrix}6\\ L\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-k u_3\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_3 = w_0(L) = \frac{q_0 L^4}{8EI}\,\frac{1}{\left(1+ KL^3/3EI\right)}$$

$$u_4 = -\frac{q_0 L^3}{6EI}\,\frac{\left(EI - KL^3/24\right)}{\left(EI - KL^3/3\right)}$$