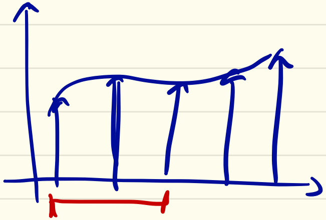
بسم الله الرحمن الرحیم

روش های انرژی

جلسه ۲۱

برای استفاده از این اصل لازم است میدان جابجایی ها بصورت جابجایی نقاط discrete شود. به عبارت دیگر باید چند پارامتر را به عنوان متغیرهای عمومی در نظر بگیریم که بوسیله آن ها میدان های جابجایی را بتوان تعریف کرد (که این پارامترها می توانند جابجایی نقاط خاص باشند)



$q_1, q_2, \ldots, q_n$ = generalized coordinates (of a structure)

(می توانند جابجایی یا چرخش باشند)

$$\delta W(q_1, \ldots, q_n) = \delta W_I + \delta W_E = 0$$

$$= \left(\frac{\partial W_E}{\partial q_i} + \frac{\partial W_I}{\partial q_i} \right) \delta q_i \qquad (9.4\text{-}12)$$

از طرفی می دانیم:

$$-\frac{\partial W_E}{\partial q_i} = F_i \qquad (9.4\text{-}13)$$

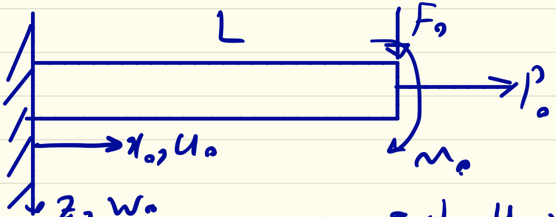
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_i = \frac{\partial W_I}{\partial q_i} = \int_V \frac{\partial U_0}{\partial q_i}\, dV} \qquad (9.4\text{-}14)$$

F_i یک نیروی عمومی است که باعث جابجایی عمومی q_i شده است.

مثلا برای تغییر شکل الاستیک تیر تحت خمش و نیروی محوری داریم:

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_0^L \left(EA\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 + EI\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)^2 \right) dx$$

$$\to \quad F_i = \int_0^L \left[EA\,\frac{du_0}{dx}\,\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{du_0}{dx}\right) + EI\,\frac{d^2 w_0}{dx^2}\,\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right)\right] dx \qquad (9.4\text{-}15)$$



مثال: تیر اویلر برنولی

در گام اول باید جابجایی های u_0, w_0 را برحسب مختصات عمومی بنویسیم. که برای این مسئله می توان این مختصات عمومی، جابجایی های

استوای تیر باشد.

از معادله تعادل برای جابجایی محوری داریم:

$$EA\frac{d^2u_0}{dx^2}=0 \longrightarrow u_0(x)=a_1+a_2x \qquad (9.4\text{-}16)$$

پس ما می‌توانیم a_2 را به عنوان $g.c.$ معرفی کنیم. ولی مفیدتر است اگر a_2 را برحسب جابجایی محوری انتهای آزاد تیر انتخاب کنیم:

$$u_0(0)=0 \longrightarrow a_1=0$$

$$u_0(L)=a_2L \longrightarrow a_2=\frac{u_L}{L}$$

$$\longrightarrow u_0(x)=\left(\frac{x}{L}\right)u_L \qquad \left(\equiv\left(\frac{x}{L}\right)c_1\right)$$

اصل جابجایی مجازی واحد می‌گوید

$$P_0=\int_0^L EA\frac{du_0}{dx}\cdot\frac{d}{dc_1}\left(\frac{du_0}{dx}\right)dx=\int_0^L EA\frac{c_1}{L}\cdot\frac{1}{L}\,dx=\frac{EA}{L}c_1$$

or $$c_1=u_L=u_0(L)=\frac{P_0L}{EA}$$

به صورت مشابه $w_0(x)$ را برحسب ثابتات عمومی C_i باید نوشت:

$$EI\,\frac{d^4 w_0}{dx^4}=0 \longrightarrow w_0(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3 \qquad (9.4\text{-}17)$$

$$\begin{cases} w_0(0)=0 \\ \dfrac{dw_0}{dx}(0)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=0 \end{cases}$$

حال باید a_3 و a_4 را برحسب جابجایی و چرخش انتهای آزاد تیر نوشت:

$$w_0(L)=w_L \longrightarrow w_L=a_3L^2+a_4L^3$$

$$\left(\frac{dw_0}{dx}\right)_{x=L}=\theta_L \longrightarrow \theta_L=2a_3L+3a_4L^2$$

اگر $w_L=C_2$ و $\theta_L=C_3$ را به عنوان g.c. در نظر بگیریم:

$$w_0(x)=\left(\frac{3x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3}\right)C_2+L\left(-\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3}\right)C_3$$

(9.4-15) $\rightarrow$ $$F_0 = \int_0^L EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial}{\partial C_2}\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) dx$$

$$= \int_0^L EI\left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^2}\frac{x}{L}\right)c_2 + L\left(-\frac{2}{L^2} + \frac{6}{L^2}\frac{x}{L}\right)c_3\right]\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^2}\frac{x}{L}\right) dx$$

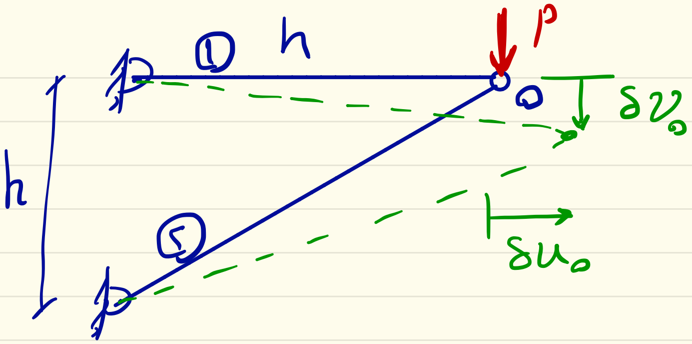
$$M_0 = \int_0^L EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial}{\partial c_3}\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}\right) dx$$

$$= \int_0^L EI\left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^2}\frac{x}{L}\right)C_2 + L\left(-\frac{2}{L^2} + \frac{6}{L^2}\frac{x}{L}\right)c_3\right] L\left(-\frac{2}{L^2} + \frac{6}{L}\frac{x}{L}\right) dx$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_0 = \dfrac{12EI}{L^3}C_2 - \dfrac{6EI}{L^2}C_3 \\[2ex] M_0 = -\dfrac{6EI}{L^2}C_2 + \dfrac{4EI}{L}C_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_2 = W_L = W_0(L) = \dfrac{F_0 L^3}{3EI} + \dfrac{M_0 L^2}{2EI} \\[2ex] C_3 = \theta_L = \left.\dfrac{dW_0}{dx}\right|_{x=L} = \dfrac{F_0 L^2}{2EI} + \dfrac{M_0 L}{EI} \end{cases}$$

مثال:



$$A^{(1)} = A^{(2)} = A$$

$$E^{(1)} = E^{(2)} = E$$

$$\delta\vec{u}_0 = \delta u_0\,\hat{e}_x + \delta v_0\,\hat{e}_y$$ virtual displacement

$$\vec{R}_0 = 0\,\hat{e}_x + P\,\hat{e}_y$$

$$\rightarrow \vec{R}_0 \cdot \delta\vec{u}_0 = 0 \cdot \delta u_0 + P\,\delta v_0 = \int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \int_0^{h_1} A\,\sigma_{11}^{(1)}\,\delta\varepsilon_{11}^{(1)} + \int_0^{h_2} A\,\sigma_{11}^{(2)}\,\delta\varepsilon_{11}^{(2)}\,dx$$

می‌دانیم:

$$h_1 = h \;,\quad h_2 = \sqrt{2}\,h$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = E\,\varepsilon_{11}^{(1)} \;,\quad \sigma_{11}^{(2)} = E\,\varepsilon_{11}^{(2)}$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{1}{h}\left(\sqrt{(h+u_0)^2 + v_0^2} - h\right) \approx \frac{u_0}{h} \qquad (9.4\text{-}16)$$

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}h}\left(\sqrt{(h+u_0)^2+(h-v_0)^2} - \sqrt{2}h\right) \approx \frac{u_0 - v_0}{2h}$$

$$\delta\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\delta u_0}{h} \qquad (9.4\text{-}17)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{\delta u_0 - \delta v_0}{2h}$$

$$0 \cdot \delta u_0 + P\,\delta v_0 = hA\sigma_{11}^{(1)}\frac{\delta u_0}{h} + \sqrt{2}hA\sigma_{11}^{(2)}\frac{\delta u_0 - \delta v_0}{2h} \qquad (9.4\text{-}18)$$

$$= \left(A\sigma_{11}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}A\sigma_{11}^{(2)}\right)\delta u_0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}A\sigma_{11}^{(2)}\right)\delta v_0$$

حال می‌توان گفت چون δu_0 و δv_0 مستقل خطی هستند پس ضرایب آنها باید صفر شوند. یا چون مقادیر برای پارامترها دلخواه هستند، یکبار $\delta v_0=0$ و $\delta u_0=1$ را انتخاب می‌کنیم و بار دیگر $\delta v_0=1$ و $\delta u_0=0$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\delta u_0: \quad 0 = A\sigma_{11}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} A\sigma_{11}^{(2)} = AE\frac{u_0}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} AE\left(\frac{u_0 - v_0}{2h}\right) \tag{9.4-19}$$

$$\delta v_0: \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} A\sigma_{11}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} AE\left(\frac{u_0 - v_0}{2h}\right) \tag{9.4-20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 = \dfrac{Ph}{AE} \\[2ex] v_0 = \dfrac{2\sqrt{2}\,Ph}{AE} + u_0 = \dfrac{Ph}{AE}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \end{cases} \tag{9.4-21}$$

9.5 - Principle of Minimum Total Potential Energy

اصل کار مجازی قابل اجرا برای هر محیط پیوسته با هر معادله فضای حالتی (الاستیک و غیرالاستیک،
خطی و غیرخطی) می باشد. حالت خاصی از اصل کار مجازی که فقط برای محیط های الاستیک (خطی
یا غیرخطی) برقرار است اصل مینیمم انرژی پتانسیل است.

برای جسم الاستیک (در غیاب تغییرات دما) سیستم conservative است و لذا تابع
انرژی کرنشی قابل تعریف می باشد. طبق (9.2-9) داریم:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (9.5\text{-}1)$$

U_0: strain energy density (positive definition)

اصل کار مجازی بیان می کند:

$$0 = \delta W = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, d\Omega - \left[\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{S_2} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, ds \right]$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \, \delta \varepsilon_{ij} \, d\Omega + \delta V$$

$$= \int_{\Omega} \delta U_0 \, d\Omega + \delta V = \delta (U + V) \equiv \delta(\Pi) \qquad (9.5\text{-}2)$$

$$\delta V = - \left[\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega + \int_{S_2} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, ds \right]$$

یا $V = - \left[\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{S_2} \vec{t} \cdot \vec{u} \, ds \right] \qquad (9.5\text{-}3)$

$U = \int_{\Omega} U_0 \, d\Omega$ strain energy (9.5-4) و همین را

دقت شود که معادله (9.5-1) شرط اصلی برای رسیدن به معادله (9.5-2) بود. اگر دامنه متغیر باشد بجای v_0 از ψ ر (free-energy function) استفاده شود به همین نتیجه خواهیم رسید.

Π را انرژی پتانسیل کل جسم الاستیک گویند.

$$\delta \Pi \equiv \delta (U+V) = 0 \qquad (9.5-5)$$

رابطه فوق را اصل **مینیمم انرژی پتانسیل** می نامند.