بسم الله الرحمن الرحیم   روشهای انرژی   جلسه ۲۰

$$\delta W_I^* = \int_0^L \int_A \{ (\varepsilon_{xx}^{(0)} + z\,\varepsilon_{xx}^{(1)})\,\delta\sigma_{xx} + 2\,\varepsilon_{xz}^{(0)}\,\delta\sigma_{xz}]\, dV$$

$$= \int_0^L (\varepsilon_{xx}^{(0)}\,\delta N + \varepsilon_{xx}^{(1)}\,\delta M + 2\,\varepsilon_{xz}^{(0)}\,\delta V)\, dx$$

$$\delta W^* = \int_0^L (\varepsilon_{xx}^{(0)}\,\delta N + \varepsilon_{xx}^{(1)}\,\delta M + 2\,\varepsilon_{xz}^{(0)}\,\delta V)\, dx - [\delta F\, w_0(L) + \delta P\, u_0(L)] \qquad (9.3\text{-}15)$$

حال اگر روابط فضای حالت را داخل کنیم:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{N}{EA} \quad \text{و} \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{M}{EI} \quad \text{و} \quad 2\,\varepsilon_{xz}^{(0)} = \frac{f_s V}{GA}$$

$$\Rightarrow \delta \Pi^* = \int_0^L \left(\frac{N}{EA}\,\delta N + \frac{M}{EI}\,\delta M + \frac{f_s V}{GA}\,\delta V\right) dx - [\delta F\, w_0(L) + \delta P\, u_0(L)] \qquad (9.3\text{-}16)$$

9.4- Virtual Work Principles

9.4-1- The Principle of virtual Displacement

اصل جابجائی مجازی بیان می‌کند که کل کار مجازی صورت گرفته توسط نیروهای حقیقی در یک جسم صفر خواهد بود اگر و فقط اگر جسم در حال تعادل باشد.

به عبارت دیگر فرض کنید ذره‌ای (یا جسم صلبی) تحت n نیروی خارجی $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ در حال تعادل باشد. حال اگر جابجائی مجازی دلخواهی مانند δu در آن بوجود آید (بطوریکه نیروها امتدادشان تغییر نکند):

$$\delta W = \vec{F}_1 \cdot \delta u + \vec{F}_2 \cdot \delta u + \ldots + \vec{F}_n \cdot \delta u$$

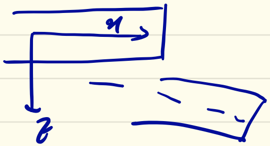
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) \cdot \delta u$$

لذا چون جسم در حال تعادل است پس مقدار داخل پرانتز صفر است پس کار مجازی صورت گرفته توسط نیروهای حقیقی به ازای هر مقدار جابجائی مجازی صفر خواهد بود.

حال یک جسم قابل انعطاف را در نظر بگیرید که با حجم V و سطح S که به دو قسمت S_1 با شرایط مرزی هندسی و S_2 با شرایط مرزی نیرویی می باشد. **اصل کار مجازی** بیان می کند که یک جسم پیوسته در حال تعادل است اگر و فقط اگر کار مجازی کل نیروها (داخلی و خارجی) تحت تغییر شکل ممکن مجازی برابر صفر است.

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_E = 0 \qquad (9.4\text{-}1)$$

این اصل مستقل از هر معادله فضای حالت می باشد. با این اصل می توان معادله تعادل یک Continuum را پیدا کرد.



مثال: تیر اویلر برنولی را در نظر بگیرید

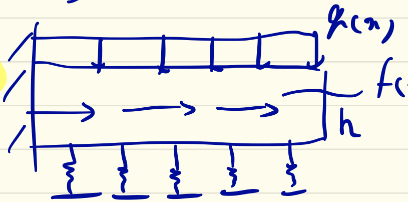
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x) - z\dfrac{dw_0}{dx} \\ v = 0 \\ w(x,y,z) = w_0(x) \end{cases} \qquad (9.4\text{-}2)$$

چون تغییر شکلها کوچک است از توانهای بالای مشتق صرفنظر می‌شود همچنین از ε_z صرفنظر می‌شود

کرنش غیرخطی چنین خواهد بود

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 - z\,\frac{d^2w_0}{dx^2} \qquad (9.4-3)$$

اگر تیر تحت بارخارجی $f(x)$ بصورت محوری، $q(x)$ بصورت عرضی باشد و فرض کنیم تیر روی بستر الاستیک با ضریب K باشد ($F_s = -K w_0(x)$) داریم:



$$\delta W_E = -\left[\int_0^L \left(f(x)\,\delta u_0 + q(x)\,\delta w\left(x,-\frac{h}{2}\right)\right)dx + \int_0^L F_s\,\delta w\left(x,\frac{h}{2}\right)dx\right] \qquad (9.4-4)$$

$$= -\left[\int_0^L \left(f(x)\,\delta u_0 + q(x)\,\delta w_0(x)\right)dx + \int_0^L K w_0(x)\,\delta w_0(x)\,dx\right]$$

$$\delta W_I = \int_0^L \int_A \sigma_{xx}\, \delta \varepsilon_{xx}\, dx\, dA \qquad (9.4\text{-}5)$$

$$= \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \left(\frac{d\delta u_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx}\frac{d\delta w_0}{dx} - z\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \right) dx\, dA$$

principle of virtual displacement (or work): $\delta W = \delta W_I + \delta W_E = 0$

$$0 = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \left(\frac{d\delta u_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx}\frac{d\delta w_0}{dx} - z\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \right) dA\, dx$$

$$- \int_0^L \left[f\,\delta u_0 + (q - k w_0)\,\delta w_0 \right] dx$$

$$= \int_0^L \left[N\left(\frac{d\delta u_0}{dx} + \frac{dw_0}{dx}\frac{d\delta w_0}{dx} \right) - M\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} \right] dx$$

$$- \int_0^L \left[f\,\delta u_0 + (q - k w_0)\,\delta w_0 \right] dx$$

$$= \int_0^L \left[-\frac{dN}{dx}\delta u_0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{dw_0}{dx}N\right)\delta w_0 - \frac{d^2M}{dx^2}\delta w_0 \right] dx$$

$$- \int_0^L \left[f\,\delta u_0 + (q - Kw_0)\,\delta w_0 \right] dx \qquad (9.4\text{-}6)$$

$$+ \left[N\delta u_0 + \left(\frac{dw_0}{dx}N + \frac{dM}{dx}\right)\delta w_0 - M\frac{d\delta w_0}{dx} \right]_0^L$$

$\delta u_0:$ $$-\frac{dN}{dx} = f(x) \qquad (9.4\text{-}7)$$

$\delta w_0:$ $$-\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dw_0}{dx}N\right) + Kw_0 - q = 0 \qquad (9.4\text{-}8)$$

دقت شود چون در عبارت مرزی $\delta u_0, \delta w_0, \frac{d\delta w_0}{dx}$ ظاهر شده

پس $u_0, w_0, \frac{dw_0}{dx}$ متغیرهای اولیه هستند.

9.4-2 Unit-Dummy-Displacement Method

اصل کار مجازی علاوه بر اینکه می‌تواند معادلات تعادل را مستقیماً بدست آورد، می‌تواند عکس العمل های تکیه‌گاه‌ها را نیز مستقیماً بدست آورد. برای مثال اگر $\vec{R}_O$ نیروی اعمال شده به نقطه O باشد می‌توانیم به نقطه O جابجایی $\delta \vec{u}_O$ را اعمال کنیم. کرنش مجازی حاصل از این جابجایی $\delta \varepsilon_{ij}^{O}$ قابل محاسبه است. لذا اصل کار مجازی بیان می‌کند که:

$$\vec{R}_O \cdot \delta \vec{u}_O = \int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}^{O}\, dv \qquad (9.4\text{-}9)$$

حال اگر در نظر بگیریم که $\delta \vec{u}_O = \hat{e}_k$ که $\hat{e}_k$ بردار واحد در راستای نیروی $\vec{R}_O$ باشد داریم

$$R_O = \int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}^{O}\, dv \qquad (9.4\text{-}10)$$

این روش را با عنوان روش جابجایی مجازی واحد می‌شناسند

Unit-Dummy-displacement method

بصورت شاخصی:

$$M_o = \int_V \sigma_{ij} \, \delta\varepsilon^{o}_{ij} \, dV \qquad (9.4\text{-}11)$$