بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۱۹

کار انجام شده توسط نیروهای واقعی تحت جابجایی های مجازی صورت گرفته از شکل محیط (حقیقی) را کار مجازی virtual work می نامند (یا کار مجازی نیروهای حقیقی)

$$\delta W = F \cdot \delta u$$

کار مجازی — نیروهای حقیقی — جابجایی مجازی

کار مجازی در یک جسم شامل دو قسمت می شود، کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی و کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی (δW_I , δW_E)

جسم به حجم V و سطح S ، تحت نیروی جرمی $f(x)$ (یا نیروی حجمی $f(x)$)

و نیروی سطحی $t(s)$ روی سطح S_2 و بقیه سطح که S_1 باشد تحت شرایط مرزی هندسی u ، در نظر بگیرید.

$$S = S_1 \cup S_2 \quad \text{و} \quad S_1 \cap S_2 = 0$$

جابجائی مجازی $\delta u(x)$ باید به گونه‌ای باشد که

$$\delta u = 0 \qquad \text{on } S_1$$

کار مجازی صورت گرفته توسط نیروهای واقعی t و f برابر است با:

$$\delta W_E = -\left(\int_V \rho f \cdot \delta u \, dv + \int_{S_2} t \cdot \delta u \, ds \right) \qquad (9.3\text{-}3)$$

علامت منفی یعنی کار روی ذرات صورت گرفته است، لذا کار انجام شده توسط خود ذرات منفی است.

نتیجه اعمال بار روی جسم، بوجود آمدن نیروهای داخلی تحت عنوان تنش در جسم است. این تنش ها تحت جابجائی های مجازی، کار انجام می دهند.

نتیجه جابجائی های مجازی بوجود آمده، کرنش های مجازی است

$$\delta \overleftrightarrow{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla(\delta u) + \left(\nabla(\delta u)\right)^T \right] \qquad (9.3\text{-}4)$$

کار نیروهای داخلی که درون جسم ذخیره می‌شوند شبیه همان انرژی کرنشی است، لذا به آن انرژی کرنشی مجازی نیز گفته می‌شود.

$$\delta U_0 = \int_0^{\delta \overleftrightarrow{\varepsilon}} \overleftrightarrow{\sigma} : d(\delta \overleftrightarrow{\varepsilon}) = \int_0^{\delta \varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d(\delta \varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij} \qquad (9.3\text{-}5)$$

↓ virtual strain energy density

جدای از اینکه رابطه فضای حالت چه باشد می‌توان گفت:

$$\delta W_I = \int_V \delta U_0\, dV = \int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dV \qquad (9.3\text{-}6)$$

مشابه جابجائی مجازی می‌توان نیروی مجازی را نیز در نظر گرفت. اگر فرض کنیم یک جسم تحت مجموعه‌ای از نیروهای مجازی (که خود سیستم نیروهای مجازی تعادل را رعایت کنند) δF قرار بگیرد، کار انجام شده توسط این نیروها

مجازی تحت جابجائی های واقعی عبارتست از:

$$\delta W^* = \delta F . u$$

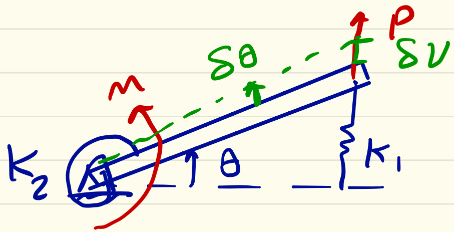
که کار مجازی مکمل (Complementary virtual work) نامیده می‌شود.

$$\delta W_E^* = -\left(\int_V \rho \delta F . u \, dv + \int_S \delta t . u \, ds \right) \qquad (9.3-7)$$

$$\delta U_0^* = \varepsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij} \qquad (9.3-8)$$

$$\delta W_I^* = \int_V \delta U_0^* \, dv = \int_V \varepsilon_{ij} \, \delta \sigma_{ij} \, dv \qquad (9.3-9)$$

مثال:



$$\delta W_E = -(P \delta V + M \delta \theta) = -(PL + M) \delta \theta$$

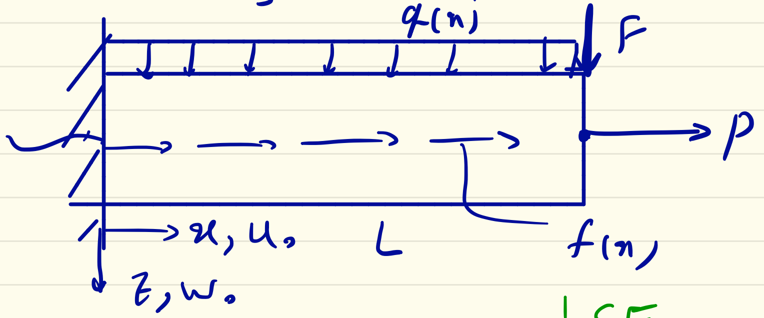
$$\delta W_I = F_s\,\delta v + M_s\,\delta\theta = k_1 v\,\delta v + k_2\theta\,\delta\theta \approx (k_1 L^2 + k_2)\,\theta\,\delta\theta$$

مثال:

$U_0(0)=0$

$W_0(0)=0$

$W_0'(0)=0$

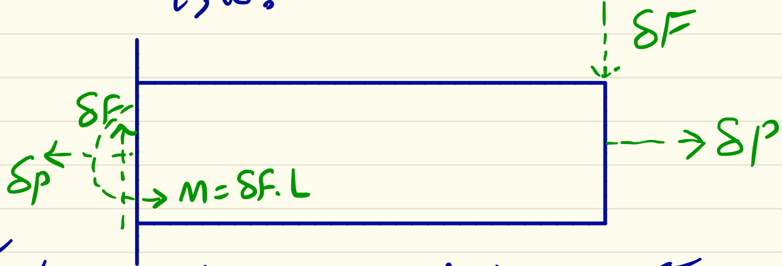


Actual geometry and force

$\delta U_0(0)=0$

$\delta W_0(0)=0$

$\delta W_0'(0)=0$



virtual displacement and force

درتیر یک سر درگیر فوق جابجائی های مجازی را چنین در نظر می‌گیریم:

$\delta u_0(x)$, $\delta w_0(x)$

$$\delta u_0(0)=0\ ,\quad \delta w_0(0)=0\ ,\quad \frac{d\,\delta w_0}{dx}(0)=0$$

$$\delta W_E = -\left[\int_0^L (q_0\,\delta w_0 + f\,\delta u_0)\,dx + F\,\delta w_0(L) + P\,\delta u_0(L)\right] \quad (9.3\text{-}10)$$

$$\delta W_I = \int_V \delta U_0\, dV = \int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

$$= \int_0^L \int_A \sigma_{11}\,\delta\varepsilon_{11}\, dA\,dx = \int_0^L \int_A \sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\, dA\,dx \quad (9.3\text{-}11)$$

برای تیر اویلر برنولی داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - z\frac{d^2 w_0}{dx^2} \Rightarrow \delta\varepsilon_{xx} = \frac{d\,\delta u_0}{dx} - z\frac{d^2\delta w_0}{dx^2}$$

$$\delta W_I = \int_0^L \int_A \sigma_{xx}\left(\frac{d\,\delta u_0}{dx} - z\frac{d^2\delta w_0}{dx^2}\right) dA\,dx$$

$$= \int_0^L \left(N\frac{d\,\delta u_0}{dx} - M\frac{d^2\delta w_0}{dx^2}\right) dx \quad (9.3\text{-}12)$$

که: $N = \int_A \sigma_{xx}\, dA$ و $M = \int_A z\,\sigma_{xx}\, dA$

کل کار مجازی برابر است با:

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_E$$

$$= \int_0^L \left[N \frac{d\delta u_0}{dx} + M\left(-\frac{d^2 \delta w_0}{dx^2}\right) - q\,\delta w_0 - f\,\delta u_0 \right] dx$$

$$- F\,\delta w_0(L) - P\,\delta u_0(L) \qquad (9.3\text{-}13)$$

تا اینجا هیچ معادله فعالی حالتی استفاده نشده است. ولی می‌توان گفت:

$$N = EA \frac{du_0}{dx} \quad , \quad M = EI \frac{d^2 w_0}{dx^2}$$

در این صورت کار مجازی کل:

$$\delta \Pi = \int_0^L \left(EA \frac{du_0}{dx} \frac{d\delta u_0}{dx} + EI \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} - q\,\delta w_0 - f\,\delta u_0 \right) dx$$

$$- F\,\delta w_0(L) - P\,\delta u_0(L) \qquad (9.3\text{-}14)$$

$w(x)$

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}$$

$$\boxed{\nabla^4 \delta w = \frac{p}{D}}$$

$$\nabla^4 (w + \delta w) = \frac{p}{D}$$

حال فرض کنید تیر ما تحت نیروهای مجازی نشان داده شده قرار دارد:

$$\delta W_E^* = -\left[\delta F\, w_0(L) + \delta P\, u_0(L) - \delta F\, w_0(0) - \delta P\, u_0(0) + (\delta F . L)\left(\frac{dw_0}{dx}\right)\Big|_{x=0}\right]$$

$$= -\left[\delta F\, w_0(L) + \delta P\, u_0(L)\right]$$

حال اگر فرض کنیم

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon^{0}_{xx}(x) + z\,\varepsilon^{(1)}_{xx}(x) \quad , \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon^{(0)}_{xz}(x)$$

$$\delta W_I^* = \int_V \left(\varepsilon_{11}\, \delta\sigma_{11} + 2\varepsilon_{13}\, \delta\sigma_{13}\right) dV$$