بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۱۸

## 9.2. Strain Energy and Complementary Strain Energy

قانون اول ترمودینامیک بیان می‌کند

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} \qquad (9.2\text{-}1)$$

$e$: internal energy per unit mass

$\vec{\sigma}$: Cauchy stress tensor

$\vec{v}$: velocity vector

$\vec{q}$: heat flux vector

برای یک جسم الاستیک در شرایط ایزوترمال انرژی داخلی فقط بصورت انرژی کرنشی ذخیره می‌شود:

$$\rho e = U_0 \qquad (9.2\text{-}2)$$

انرژی کرنشی (در واحد حجم)

$$\frac{\partial U_o}{\partial t} = \overleftrightarrow{\sigma} : \nabla \vec{v} \qquad (9.2\text{-}3)$$

$$(\overleftrightarrow{\phi} : \overleftrightarrow{\psi}) = (\phi_{ij}\, \hat{e}_i \hat{e}_j) : (\psi_{mn}\, \hat{e}_m \hat{e}_n)$$

$$= \phi_{ij}\, \psi_{mn}\, (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_n)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_m)$$

$$= \phi_{ij}\, \psi_{mn}\, \delta_{in}\, \delta_{jm}$$

$$= \phi_{ij}\, \psi_{ji}$$

چون $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow dU_o = \overleftrightarrow{\sigma} : \nabla(d\vec{u}) \qquad (9.2\text{-}4)$

از طرفی می‌دانیم:

$$\nabla(d\vec{u}) = d(\nabla\vec{u}) = d\left\{ \tfrac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t\right] + \tfrac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} - (\nabla\vec{u})^t\right] \right\}$$

$(9.2\text{-}5)$

$$\nabla(d\vec{u}) = d\overleftrightarrow{\varepsilon} + d\overleftrightarrow{\omega}$$

$\overleftrightarrow{\varepsilon}$ : linear strain tensor $\left(= \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^t\right)\right)$

$\overleftrightarrow{\omega}$ : rotation tensor $\left(= \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} - (\nabla\vec{u})^t\right)\right)$

از طرفی چون تانسور تنش متقارن است لذا:

$$\overleftrightarrow{\sigma} : \overleftrightarrow{\omega} = 0 \qquad (9.2\text{-}6)$$

$$\Rightarrow \quad dU_0 = \overleftrightarrow{\sigma} : d\overleftrightarrow{\varepsilon} = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad (9.2\text{-}7)$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad (9.2\text{-}8)$$

اگر چنین $U_0(\varepsilon_{ij})$ وجود داشته باشد پس طبق تعریف $\sigma_{ij}$،

conservative (پایستار) است:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \qquad (9.2\text{-}9)$$

درحالت کلی (الاستیک خطی یا غیرخطی) فرض می‌کنیم رابطه (9.2-8) برقرار است.
اگر مسأله گرمایی درنظر گرفته شود، فرض می‌کنیم تابعی به نام انرژی آزاد گیبس
Gibb's free energy وجود دارد که:

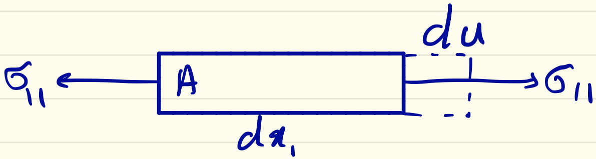
$$\rho \psi(\varepsilon_{ij}) = U_0(\varepsilon_{ij}, T) - \rho T \eta(\varepsilon_{ij}, T) \qquad (9.2\text{-}10)$$

$T =$ temprature

$\eta$: specific entropy

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = \eta \qquad (9.2\text{-}11)$$

رابطه (9.2-8) را با روش دیگری نیز می‌توان به دست آورد:



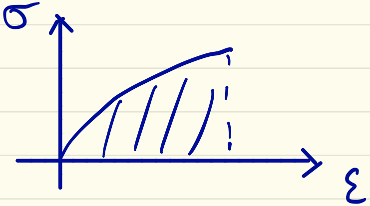

$$dU = (A\sigma_{11})(d\varepsilon_{11} \cdot dx_1) = \sigma_{11} d\varepsilon_{11} (A dx_1) = dU_0 (A dx)$$

انرژی کرنشی کل حجم

انرژی کرنشی در واحد حجم

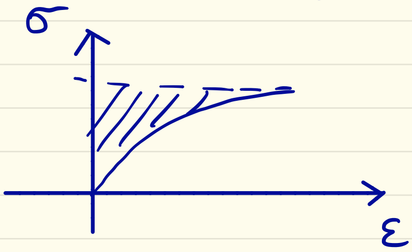
$$dU_0 = \sigma_{11} d\varepsilon_{11}$$

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_{11} d\varepsilon_{11}$$




Strain energy density

بطریق مشابه




$$dU_0^* = \varepsilon_{11}\, d\sigma_{11}$$

$$U_0^* = \int_0^{\sigma_{11}} \varepsilon_{11}\, d\sigma_{11} \qquad (9.2\text{-}12)$$

Complementary strain energy density

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (9.2\text{-}13)$$

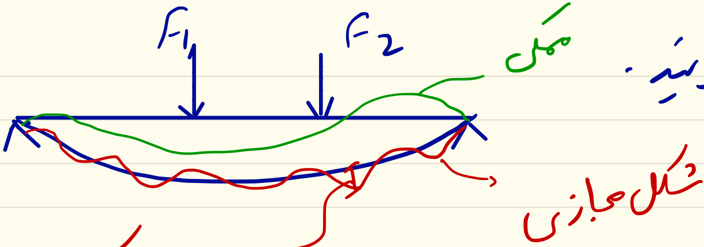
# 9.2 - Virtual work

پیکربندی یا شکل یک جسم بیانگر موقعیت هر یک از نقاط مادی آن جسم است. از نظر صرفا هندسی یک سیستم مکانیکی می تواند شکلهای مختلفی را به خود بگیرد. ولی آن شکلهایی که قیود هندسی را رعایت کنند به آن یک «شکل ممکن» می گویند (admissible configuration).

از تمام شکل های ممکن فقط یکی از آنها تحت نیروهای اعمال شده در تعادل خواهد بود و قانون دوم نیوتن را ارضا می کند. تمام شکلهای ممکن در همسایگی این شکل صحیح که از حرکت جزئی نقاط مادی بوجود آمده اند دارای «تغییرات اندک» نسبت به شکل صحیح هستند. infinitesimal variations

طی این تغییرات، قیود هندسی سیستم از بین نمی روند و نیروهای اعمال شده در حالت تعادل خود باقی می مانند.

به این تغییرات اندک شکل صحیح، «جابجایی های مجازی»




(vitual displacements) می گویند.

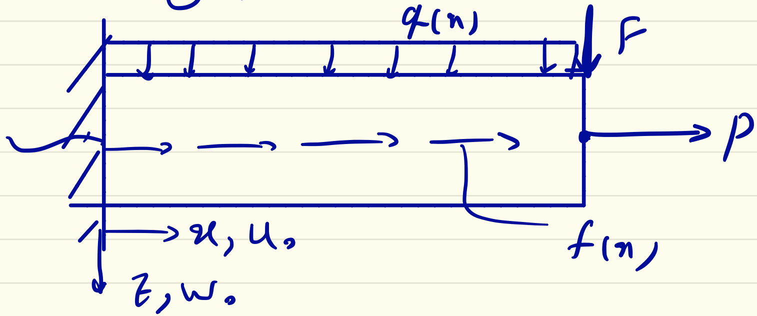
این جابجایی های مجازی ممکن است هیچ رابطه ای با جابجایی های واقعی که تحت نیروهای اعمالی در جسم بوجود می آیند نداشته باشند. لذا چون صرفا تصوری هستند به آنها مجازی گفته می شود.

به عنوان مثال تیر یکسر گیردار را درنظر بگیرید که تحت بارهای گسترده یا نقطه ای است:

$u_0(0)=0$

$w_0(0)=0$

$w_0'(0)=0$




شکل جسم بعد از اعمال بارهای خارجی $w_0(x)$ و $u_0(x)$ می باشد.

شرایط مرزی چنین خواهند بود

$$w_0(0)=\hat{w}_0 \quad , \quad \left(\frac{dw_0}{dx}\right)\Big|_{x=0}=\hat{\theta}_0 \quad \text{و} \quad u_0(0)=\hat{u}_0 \qquad (9.3\text{-}1)$$

که $\hat{w}_0$ ، $\hat{\theta}_0$ و $\hat{u}_0$ مقادیر ثابت هستند که اینجا صفر باشند. به اینها <u>شرایط مرزی</u> هندسی می‌گویند.

شکل های ممکن برای تیر باید شرایط مرزی هندسی را رعایت کنند:

$$\begin{cases} w_1(x)=\hat{w}_0+\hat{\theta}_0 x+a_1x^2 \\ u_1(x)=\hat{u}_0+b_1x \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_2(x)=\hat{w}_0+\hat{\theta}_0 x+a_1x^2+a_2x^3 \\ u_1(x)=\hat{u}_0+b_1x+b_2x^2 \end{cases} \quad \text{و} \ ...$$

تنها شکل $w_0(x)$ و $u_0(x)$ است که علاوه بر شرایط مرزی هندسی، شرایط مرزی نیرویی و روابط تعادل را نیز ارضا می‌کند که ما دنبال یافتن آن هستیم.

Virtual displacements (جابجائی مجازی) باید حتماً به شکل‌های زیر باشد:

$$\left( \delta w_0 = w_1(x) - w_0(x) \right)$$

$$\begin{cases} \delta w_0 = c_1 x^2 \\ \delta u_0 = d_1 x \end{cases} , \quad \begin{cases} \delta w_0 = c_1 x^2 + c_2 x^3 \\ \delta u_0 = d_1 x + d_2 x^2 \end{cases} , \quad \dots$$

این جابجائی‌های مجازی باید شرایط مرزی هندسی سیستم همگن را رعایت کنند. یعنی

$$\delta w_0(0) = 0 \quad و \quad \left( \frac{d\delta w_0}{dx} \right)\Big|_{x=0} = 0 \quad و \quad \delta u_0(0) = 0 \qquad (9.3\text{-}2)$$

یعنی جابجائی‌های مجازی در نقاطی که قیود هندسی داریم صرف‌نظر از اینکه این مقدار قید هندسی چقدر است برابر صفر باشد.