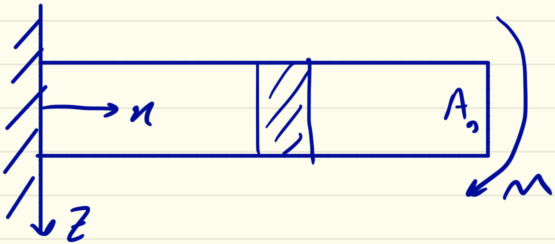
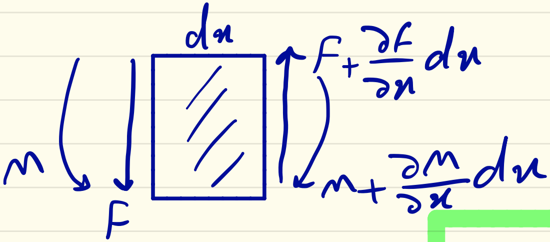
بسم الله الرحمن الرحیم — ضربه — جلسه ۱۴

ب- موج پیچشی

روابط ساده ارائه شده در فصل های قبلی دارای دقت خوبی در قسمت پیچشی هستند.

ج- موج های خمشی (ضربه عرضی)





تحلیل اول:

$$\Sigma F_z = m a_z$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}dx = (\rho_0 A_0 dx)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (a)$$

نیروی برشی $\quad F = EI\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho_0 A_0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}} \qquad (4-4)$$

اگر تیر استوانه‌ای باشد رابطه چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -C_0^2 \frac{a^2}{4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad (4-5)$$

که $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

جواب این معادله چنین است:

$$w = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - C_p t)$$

λ : طول موج

C_p : سرعت انتشار موج

$$\boxed{C_p = \frac{C_0}{\lambda / \pi a}}$$

اگر λ خیلی کوچک باشد C_p به سمت بینهایت می‌رود که صحیح نیست. پس λ باید از ابعاد تیر بزرگتر باشد.

تحلیل دوم :

$$(\mathrm{I})\quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\rho_0 A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (d)$$

$$(\mathrm{II})\quad \left(-F + \frac{\partial M}{\partial x}\right) dx = (I_y \cdot dx)\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \qquad (e)\quad (\Sigma M = I\alpha)$$

از طرفی می دانیم:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \qquad (f)$$

$$\xrightarrow{(e)}\quad -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + I_y \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \qquad (g)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad (h)$$

برای استوانه

$$I_y = A_0 \rho_0 \frac{a^2}{4}$$

$$\xrightarrow[(d)]{(9)} \quad \boxed{C_0^2 \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0} \qquad (4-7)$$

اگر راه حل تقریبی برای معادله فوق را درنظر بگیریم:

$$w = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - C_p t)$$

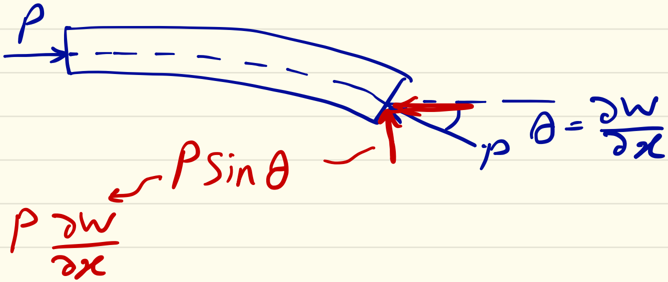
$$\boxed{C_p = \frac{C_0}{1 + \lambda/\pi a}} \qquad (4-8)$$

دیده می‌شود

$$\frac{a}{\lambda} \to \infty \Rightarrow \frac{C_p}{C_0} \to 1$$

در این دو روش تحلیل هیچ کدام تغییر شکل برشی درنظر گرفته نشده است.

د - ستون الاستیک تحت نیروی فشاری و ضربه عرضی



P : نیروی محوری

$$\xrightarrow{(4-4)} \quad \rho_0 A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

بنا بر مولفه عمودی P

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_0 A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0} \qquad (4-9)$$

معادله انتشار موج خمشی (عرضی) با حضور نیروی محوری

با درنظر گرفتن تغییر شکل های کوچک یک چنین جایی به معادله فوق داد:

$$w = a e^{2\pi i(\mu x - \nu t)} \qquad (a)$$

$$\nu^2 = \frac{4\pi^2 EI \mu^4 - P\mu^2}{\rho_0 A_0} \geq 0 \qquad (b)$$

در این رابطه $\lambda = \frac{1}{\mu}$ طول موج است و $\frac{\nu}{\mu}$ سرعت انتشار موج می باشد.
دقت شود که عبارت (b) باید مثبت باشد. لذا طول موج بحرانی چنین خواهد بود

$$\mu_c^2 = \frac{P}{4\pi^2 EI} \rightsquigarrow \lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{EI}{P}} \qquad (c)$$

برای استوانه

$$\lambda_c = \pi d\sqrt{\frac{E}{2\sigma}} \qquad (d)$$

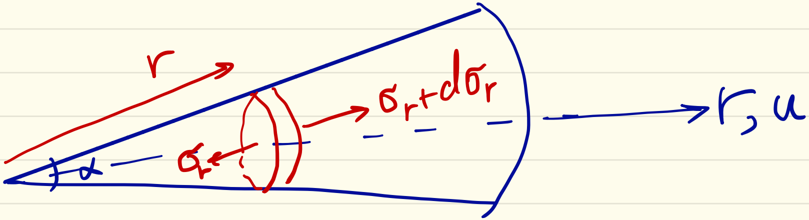
یعنی اگر موجی با طول موج λ_c بصورت عرضی به ستون وارد شود استارزنی یا بلند
به چنین موجی، موج ناپایداری گویند. $(\lambda < \lambda_c)$

وقتی دو میله یکسان با سرعت $2v$ به هم برخورد کنند طول موج ناپایداری برابر می‌شود با:

$$\lambda_c = \pi d \sqrt{\frac{c}{2v}}$$

دهم،

2_4 . انتشار موج تنش فشاری در میله مخروطی



فرضیات لازم:

الف - طول موج نسبت به قطر قسمتی از مخروط که موج در آن انتشار می‌یابد بزرگ است.

ب - زاویه مخروط کوچک است.

از روابط تعادل نیرو و شتاب (حرکت) برای موج کروی داریم:

$$(\rho \alpha r^2 dr)\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = d(\alpha r^2 \sigma_r) \qquad (a)$$

$$\rho r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\sigma_r + r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \qquad (b)$$

از طرفی برای σ_r کششی داریم:

$$\sigma_r = E\frac{\partial u}{\partial r} \qquad (c)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(ur) = E\left(2\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \qquad (d)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 (ur)}{\partial t^2} = \overbrace{\frac{E}{\rho}}^{c^2}\frac{\partial^2 (ur)}{\partial r^2}} \qquad (۴-۱۵)$$

جواب: $ur = f(r-ct) + F(r+ct)$ (e)

← موج به سمت راست حرکت می‌کند

← موج از راس دور می‌شود

برای حالت موج پیش رونده به سمت راس مخروط داریم:

$$u = \frac{1}{r} F(r+ct) \qquad (f)$$

$$\sigma_r = E\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{E}{r} \cdot F'(r+ct) - \frac{E}{r^2} F(r+ct) \qquad (g)$$

از طرف دیگر:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{r} F'(r+ct)$$

دیده می‌شود که رابطه ساده‌ای بین تنش و سرعت ذرات نمی‌توان یافت (شبیه $\sigma = \rho c v$)

اگر r خیلی بزرگ باشد با ساده سازی می‌توان گفت $\sigma_r = \rho c v$

(که $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$)

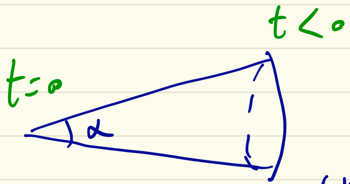
عبارت $F(r+ct)$ را با توجه به شرایط مرزی می‌توان چنین انتخاب کرد

$$F(r+ct) = c\, e^{-\left(\frac{r+ct}{\lambda}\right)} \qquad (h)$$

که λ طول موج است.

$$\boxed{u = \frac{c}{r}\left(e^{-\frac{r+ct}{\lambda}} - 1\right)} \qquad (4-11)$$

وقتی موج به راس می‌رسد $t=0$ در نظر می‌گیریم



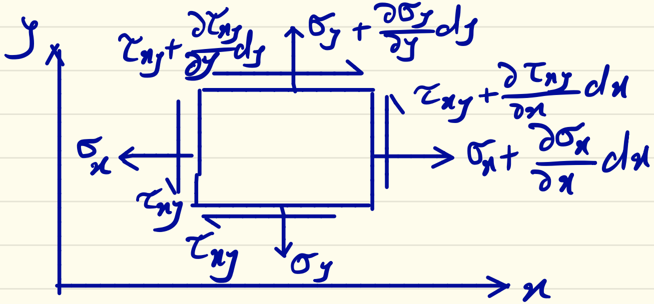
$$\xrightarrow[(9)]{(4-11)} \quad \sigma_r = -\frac{Ec}{r^2}\left(e^{-\left(\frac{r+ct}{\lambda}\right)} - 1\right) - \frac{Ec}{\lambda r}\, e^{-\left(\frac{r+ct}{\lambda}\right)} \qquad (4-12)$$

$$\begin{cases} t = -\dfrac{r}{c} \longrightarrow \sigma_r = -\dfrac{Ec}{\lambda r} < 0 \\ r \gg |ct| \longrightarrow \sigma_r = \dfrac{Ec}{r^2} > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_r = 0 \longrightarrow e^{-\left(\frac{r+ct}{\lambda}\right)}\left(\frac{r}{\lambda}+1\right) = 1 \qquad (i)$$

4-3 ـ انتشار موج الاستیک در یک ورق نازک

حالت تنش صفحه‌ای درنظر میگیریم.



روابط حرکت

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \qquad (a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \qquad (b)$$

روابط هوک

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \sigma_y\right] \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \sigma_x\right] \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \qquad (c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\nu \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \tau_{xy} = G\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases} \qquad (d)$$

با قرار دادن روابط هوک در روابط حرکت داریم:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] + G\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] & (e) \\ \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] & (f) \end{cases}$$

اگر عامل تحریک فقط در جهت x به ورق وارد شود آنگاه:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ ) = 0$$

پس:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (4\text{-}13) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{G}{\rho} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (4\text{-}14) \end{cases}$$

پس دراین حالت دو موج انتشار می یابد. یک موج با عث تغییر مکان در جهت x با سرعت $C_L = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ و دیگری باعث تغییر مکان عرضی عمود بر x و با سرعت $C_t = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ خواهد شد.

۴-۴- انتشار موج الاستیک در یک محیط گسترده (موجهای حجمی):

در ابتدا انتشار موج در یک جسم یک بعدی بررسی شد. سپس در یک صفحه دو بعدی موج را بررسی کردیم و حالا به اجسام سه بعدی می پردازیم که موجها در سه جهت در آن انتشار می یابد.