۴-۴- انتشار امواج الاستیک در یک محیط گسترده (موجهای حجمی):

در ابتدا انتشار امواج در یک جسم یک بعدی بررسی شد. سپس در یک صفحه دو بعدی موج را بررسی کردیم و حالا به اجسام سه بعدی می‌پردازیم که موج‌ها در سه جهت در آن انتشار می‌یابد.

رابطه حرکت در جهت x عبارتست از:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\underbrace{X\rho}_{\text{نیروی حجمی}}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (a)$$

هوک:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] \qquad (b)$$
$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\tau_{yz}}{G}$$
$$\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_{xz}}{G}$$

شکل دوم روابط هوک اینچنین می باشد:

$$\sigma_x=\lambda\varepsilon+2G\varepsilon_x=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2G\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (c)$$

$$\sigma_y = \lambda \varepsilon + 2G\varepsilon_y$$ (C)

$$\sigma_z = \lambda \varepsilon + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

که در آن:

ضریب لامه $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

کرنش حجمی $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\Delta V}{V}$

$$\xrightarrow[\text{در رابطه حرکت}]{\text{روابط هوک}} \frac{\partial}{\partial x}\left(2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\varepsilon\right) + G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ G\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + X\rho = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (\text{e})$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)+\lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+G \nabla^2 u+X \rho=\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (f)$$

که:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

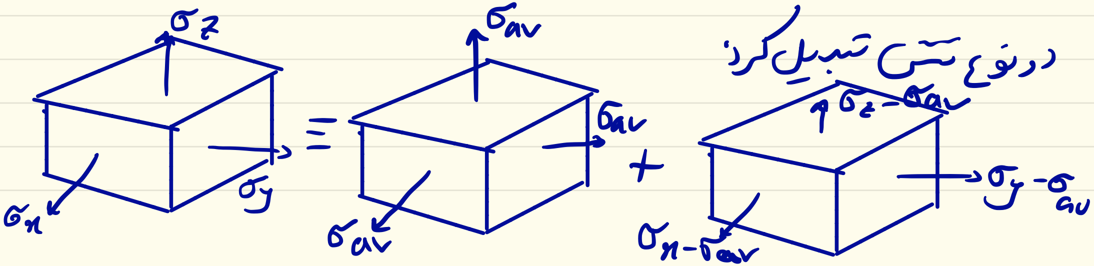
$$\Rightarrow \boxed{(G+\lambda) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+G \nabla^2 u+X \rho=\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \qquad (4\text{-}15)$$

روابط مشابهی برای موج در جهت y و z می‌توان نوشت.

اگر نیروی حجمی صرف‌نظر شود:

$$(G+\lambda) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+G \nabla^2 u=\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4\text{-}16)$$

می‌دانیم که هرگونه تنش سه‌بعدی که به جسم وارد می‌شود را می‌توان به‌صورت ترکیب دو نوع تنش تبدیل کرد



۱- تنش هیدرواستاتیک که فقط باعث تغییر حجم می‌شود و شکل آن را تغییر نمی‌دهد.

۲- تنش عامل اعوجاج که حجم را تغییر نمی‌دهد.

انتشار موج در هر یک از حالات فوق جداگانه بررسی می‌شود.

الف- موج‌های حجم ثابت:

حجم ثابت $\longrightarrow \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 u} \qquad (4\text{-}17)$$

جواب: $u = f_1(lx + my + nz - ct) \qquad (g)$

n, m, l کسینوس‌های هادی عمود بر سطحی که موج در آن حرکت می‌کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c f_1' \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f_1'' \qquad (h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = l f_1' \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = l^2 f_1''$$

بطریق مشابه (i)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n^2 f_1'' \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = m^2 f_1''$$

$$\nabla^2 u = f_1''$$

پس موجی با سرعت C_t بوجود می‌آید

$$\Rightarrow \boxed{C_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}} \qquad (4\text{-}18)$$

امواجی تولید موج تنش حجم ثابت با سرعت موج تنش پیچشی انتشار یابد

ب - موج‌های بدون چرخش یا حجمی

بدون چرخش یعنی:
$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

$$(j) \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{و} \quad \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

از طرف دیگر:
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (k)$$

$$\xrightarrow{(j)} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \qquad (\ell)$$

$$\xrightarrow{(3-16)} \quad (\lambda + 2G)\, \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \nabla^2 u \qquad (4-19)$$

سرعت موج تنش بدون چرخش $\Leftarrow$

$$\boxed{C_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}} \qquad (4-20)$$

دیده می‌شود اگر در جسم آشفتگی رخ دهد دو موج با دو سرعت مختلف رخ می‌دهد. سرعت ذرات در هنگام عبور این دو موج نیز متفاوت است.

در زلزله‌شناسی:

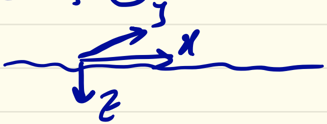
موج‌های حجم ثابت: موج‌های لرزشی یا S (shake waves)

موج‌های بدون چرخش: موج‌های فشاری یا P (Push waves)

درمحیط‌های مایع که لرزشی را نمی‌توانند منتقل کنند $(G = 0)$ موج‌های لرزشی نداریم.

۴-۵- موج‌های سطحی و موج‌های رایلی (Rayleigh waves)

موج‌های سطحی در لایه‌ی باریکی از سطح یک محیط پیوسته ایجاد می‌شود. مانند موج حاصل از پرتاب سنگ در سطح دریاچه آب، که در فاصله دور از منبع موج حالت دو بعدی پیدا می‌کند $(w=0)$



اگر عامل تحریک فقط در جهت y باشد:

$$\xrightarrow[\text{موج بدون چرخش}]{(4-19)} \quad \begin{cases} u_1 = s e^{-ry} \sin(pt - sx) \\ v_1 = r e^{-ry} \sin(pt - sx) \end{cases} \qquad (a)$$

که در آن s, r, p ثابت هستند:

$$\Rightarrow C_s = \frac{p}{s}$$ سرعت موج در جهت x $\qquad (4-21)$

با قرار دادن (a) در رابطه $(4-19)$ باید:

$$r^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} \qquad (b)$$

تعریف می کنیم:

$$h^2 = \frac{p^2}{C_d^2} = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2G} \qquad (c)$$

آنگاه

$$r^2 = s^2 - h^2 \qquad (d)$$

به طوریکه

$$\xrightarrow[\text{موج بدون تضعیف}]{(4-17)} \begin{cases} u_2 = A b e^{-by} \sin(pt - sx) \\ v_2 = -A s e^{-by} \cos(pt - sx) \end{cases} \qquad (e)$$

که در آن A و b ثابت های مثبتی هستند. با قرار دادن در (4-17) داریم:

$$b^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{G} \qquad (f)$$

تعریف می کنیم:

$$K^2 = \frac{p^2}{C_t^2} = \frac{\rho p^2}{G} \qquad (g)$$

$$\longrightarrow \quad b^2 = s^2 - k^2 \qquad (h)$$

$\Longrightarrow$ حل مسأله: $\begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ v = v_1 + v_2 \end{cases}$

حال باید A و b و P و r و s را طوری انتخاب کنیم که شرایط مرزی مسأله را برآورده کنند:

$$\text{at } \quad y=0 \quad \begin{cases} \tau_{xy}=0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \sigma_y = 0 \Longrightarrow \lambda \varepsilon + 2G \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (ن)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2rs + A(b^2+s^2) = 0 \\ \left(\dfrac{k^2}{h^2} - 2\right)(r^2 - s^2) + 2(r^2 + Abs) = 0 \end{cases} \qquad (ژ)$$

$$\xrightarrow{(c),(g)} \frac{k^2}{h^2} - 2 = \lambda / G \qquad (k)$$

با حذف A در روابط (ژ) و همچنین با استفاده از (d), (h) داریم:

$$(2s^2-k^2)^2=4brs^2 \qquad (l)$$

با حذف rb از سه رابطه (d), (h), (l) داریم:

$$\left(\frac{k^2}{s^2}-2\right)^4=16\left(1-\frac{h^2}{s^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{s^2}\right) \qquad (m)$$

با (c), (g) و (4-21):

$$\left(\frac{c_s^2}{c_t^2}-2\right)^4=16\left(1-\frac{c_s^2}{c_d^2}\right)\left(1-\frac{c_s^2}{c_t^2}\right) \qquad (n)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{c_s}{c_t}$$

می‌دانیم:

$$\frac{c_t^2}{c_d^2}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$(n) \longrightarrow \alpha^6-8\alpha^4+8\left(3-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\alpha^2-16\left[1-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right]=0 \qquad (p)$$

برای مثال اگر $\nu = 0.25$ باشد:

$$3\alpha^6 - 24\alpha^4 + 56\alpha^2 - 32 = 0$$

یا

$$(\alpha^2 - 4)(3\alpha^4 - 12\alpha^2 + 8) = 0$$

جواب‌ها: $\alpha^2 = 4$ ، $\alpha^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\alpha^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

از این جواب‌ها فقط جواب آخر شرط مثبت بودن r^2 و b^2 در روابط (d) و (h) را برآورده می‌کنند:

$$C_s = \alpha C_t = 0.9194\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (\nu = 0.25)$$

$$C_s = 0.9553\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (\nu = 0.5)$$

همانطور که می‌بینید در هر دو حالت سرعت موج سطحی کمی کمتر از سرعت انتشار موج حجم ثانویه است.