بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۱۴

مثال:

$$0<x<1 \qquad -\frac{d^2u}{dx^2}-u+x^2=0$$

با دو دسته شرایط مرزی زیر حل کنید

دسته 1: $u(0)=0,\ u(1)=0$

دسته 2: $u(0)=0,\ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}=1$

حل با دسته ۱:

$$B(w,u)=\int_0^1\left(\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}-wu\right)dx$$

$$l(w)=-\int_0^1 wx^2\,dx$$

با توجه به اینکه هردو شرط مرزی، شرط مرزی اساسی هستند پس باید تمام ϕ_j ها در تقریب u را طوری انتخاب کنیم که شرایط زیر را ارضا کنند.

$$\phi_j(0)=\phi_j(1)=0$$

$$\phi_1 = x(1-x), \quad \phi_2 = x^2(1-x), \quad \dots, \quad \phi_N = x^N(1-x)$$

چون شرایط مرزی همگن هستند $\Rightarrow \phi_0 = 0$

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \underbrace{\phi_0}_{0}$$

دقت شود که مجموعهٔ $\{\phi_j\}$ کامل هستند.

توجه: تعریف عمود بودن تحت یک اپراتور

$$L(\phi_i, \phi_j) = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$A_{ij} \; \bar{\otimes} \; B_{ij} = 0$$

: $\otimes$ $\underline{\otimes}$

$$B(w,u) = l(w)$$

$$\int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j \right) \right] dx = -\int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} c_j \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx = -\int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \, B(\phi_i, \phi_j) = l(\phi_i)$$

از طرفی گفتیم:

$$\phi_i = x^i (1-x) = x^i - x^{i+1}$$

$$\frac{d\phi_i}{dx} = i x^{i-1} - (i+1) x^i$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \left\{ \left[i x^{i-1} - (i+1) x^i \right] \left[j x^{j-1} - (j+1) x^j \right] - (x^i - x^{i+1})(x^j - x^{j+1}) \right\} dx$$

$$l(\phi_i) = F_i = -\int_0^1 x^2 (x^i - x^{i+1}) \, dx$$

در نتیجه:

$$[B]\{C\} = \{F\}$$

مثلا برای تقریب دو جمله‌ای (یعنی $N=2$) داریم:

$$\frac{1}{420} \begin{bmatrix} 126 & 63 \\ 63 & 52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -\frac{10}{123} \quad \text{و} \quad c_2 = -\frac{21}{123}$$

یعنی

$$u = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = \left(-\frac{10}{123}\right)(x - x^2) + \left(\frac{-21}{123}\right)(x^2 - x^3)$$

برای یافتن حالت دوخطی (تابع پتانسیل) می‌توان گفت:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u^2 + 2x^2 u\right] dx$$

حل با دسته 2 شرایط مرزی

چون فقط یک شرط مرزی اساسی داریم پس فقط باید $\phi_j(0) = 0$

شرط اساسی مسئله داریم $u(0) = 0 \longrightarrow \phi_0 = 0$

لذا می‌توانیم توابع تقریب را چنین انتخاب کنیم:

$$\phi_j = x^j$$

② روش های باقیمانده وزنی

دسته ای از روش های تقریبی که با نام روش های باقیمانده وزنی شناخته می شوند نیز از روش انتگرال وزنی باقیمانده استفاده می کنند، ولی با این تفاوت نسبت به روش ریلی-ریتز که در آنها از تکنیک انتگرال جزء به جزء استفاده نمی شود. این امر باعث می شود درجه مشتق در معادله حاکم کم نشود و لذا تابع تقریب حدس زده شده برای u الزام مشتق پذیری از درجه بالاتری را دارا باشد.

معادله حاکم

$$L(u) = P \qquad (8.5-10)$$

باقیمانده

$$R = L(\tilde{u}) - P \qquad (8.5-11)$$

حدس برای u

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} C_j \phi_j + \phi_0 \qquad (8.5-12)$$

شکل انتگرال وزنی

(مثلاً دوبعدی) $\int w_i R \, dx \, dy = 0 \qquad i = 1, \dots, N \qquad (8.5\text{-}13)$

الزامات روش باقیمانده وزنی

۱- ϕ باید مشتقات تا بالاترین مرتبه در معادله حاکم را داشته باشند (در ریلی ریتز درجه مشتق کم شده بود)

۲- الزاماً $\tilde{u}$ باید کلیه شرایط مرزی (اساسی و طبیعی) را ارضا نماید (در ریلی ریتز فقط شرایط اساسی باید ارضا شد).

۳- مجموعه $\{w_i\}$ باید به صورت خطی مستقل از یکدیگر باشند.

2-1- روش پتروف-گلرکین

در روش باقیمانده وزنی اگر $w_i \neq \phi_i$ به آن روش پتروف-گلرکین می‌گویند.

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\int w_i L(\phi_j) \, dx \, dy \right] c_j = \int w_i [P - L(\phi_0)] \, dx \, dy \qquad (8.5\text{-}14)$$

$$\sum B_{ij} c_j = F_i \qquad \left(\equiv [B]\{c\} = \{F\} \right) \qquad (8.5\text{-}15)$$

دقت شود که ماتریس [B] متقارن نیست $B_{ij} \neq B_{ji}$

2-2 - روش گلرکین

در این روش $\boxed{W_i = \phi_i}$ در نظر گرفته می‌شود. لذا

$$B_{ij} = \int \phi_i L(\phi_j)\, dx\, dy \qquad (8.5-16)$$

$$F_i = \int \phi_i \left[P - L(\phi_0) \right] dx\, dy$$

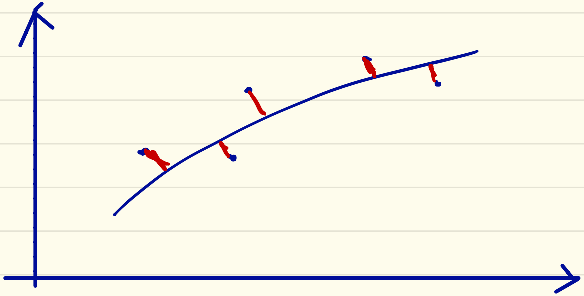
دقت شود که تفاوت روش گلرکین و ریلی - ریتز همان تفاوت در روش باقیمانده وزنی با روش ریلی - ریتز است.

روش های گلرکین و ریلی - ریتز با برقرار شدن دو شرط زیر نتایج یکسانی می‌دهند:

۱ - زمانیکه کلیه شرایط مرزی مسأله‌ما از نوع اساسی باشند

۲ ـ و توابع تقریب روش گلرکین در روش ریلی ریتز استفاده می‌شوند.

2-3 ـ روش حداقل مربعات



$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0$$

$$\min \left(\int_\Omega R^2(x,y,c_j)\,dx\,dy \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial c_j}\left(\int_\Omega R^2(x,y,c_j)\,dx\,dy \right) = 0 \qquad j=1,\dots,N \qquad (8.5-17)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial R}{\partial c_j} R\,dx\,dy = 0 \qquad j=1,\dots,N \qquad (8.5-18)$$

پس در این روش

$$\boxed{w_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}} \qquad (8.5-19)$$

اگر عملگر L خطی باشد آنگاه

$$L(u) = p$$

$$R = L(u) - p$$

$$R = L\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0\right) - p = \sum_{j=1}^{N} c_j L(\phi_j) + L(\phi_0) - p \qquad (8.5\text{-}20)$$

یعنی

$$\boxed{w_i = L(\phi_i)} \qquad (8.5\text{-}21)$$

$$B_{ij} = \int L(\phi_i) L(\phi_j)\, dx\, dy \qquad (8.5\text{-}22)$$

$$F_i = \int L(\phi_i)\left[p - L(\phi_0)\right] dx\, dy$$

در این روش B_{ij} متقارن است ولی دارای همان مرتبه مشتق گیری معادله حاکم می باشد.

2.4 ـ روش تجمع محلی

در این روش برای یافتن N معادله جبری عمل می‌کنیم $\left(\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0\right)$

$$R(x^i, c_j) = 0 \qquad i = 1, \dots, N \qquad (8.5-23)$$

این روش را نیز می‌توان بصورت باقیمانده وزنی بیان کرد

$$\boxed{w_i = \delta(x - x^i)} \qquad \text{تابع دیراک} \qquad (8.5-24)$$

$$\int \delta(x - x^i) R(x, c_j)\, dx\, dy = 0 \qquad (8.5-25)$$

$$\Rightarrow \qquad R(x^i, c_j) = 0$$