بسم الله الرحمن الرحیم　　　روش های انرژی　　　جلسه ۱۵

مثال ۱: کشش تار

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-cu+x^2=0 \qquad 0<x<1$$

$$\text{B.C.:} \quad u(0)=0 \;, \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1}=1$$

حل:

مرحله ۱:

$$\int_0^1 w\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-cu+x^2\right]dx=0$$

مرحله ۲:

$$\int_0^1\left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}-cwu+wx^2\right)dx-\left(wa\frac{du}{dx}\right)\Big|_0^1=0$$

مرحله ۳:

$$\underbrace{\int_0^1\left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}-cwu\right)dx}_{B(w,u)}+\underbrace{\int_0^1 wx^2dx-w(1)}_{-\ell(w)}=0$$

$$B(w,u) = \ell(w)$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\left[a\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - cu^2 + 2ux^2\right]dx}_{\text{انرژی کرنشی}} - \underbrace{u(1)}_{\text{کار انجام شده توسط نیروی انتهایی}} \times 1$$

(مقدار ۱ است)

مثال ۲: خمش الاستیک تیر (w خیز، ℓ طول، I ممان اینرسی، $f(x)$ نیروی گسترده

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[b(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right] - f(x) = 0 \qquad 0<x<\ell$$

(عرض ردن تیر است)

B.C.: $w(0) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0$

$$\left.\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right|_{x=\ell} = M_0 \quad , \quad \left.\left[\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]\right|_{x=\ell} = 0$$

حل:

مرحله ۱:

$$\int_0^l v\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-f\right]dx=0$$

مرحله ۲:

$$\int_0^l\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-vf\right]dx+\left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]\Big|_0^l=0$$

عبارت مرزی

$$\int_0^l\left(b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}-vf\right)dx+\left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{dv}{dx}\,b\frac{d^2w}{dx^2}\right]\Big|_0^l=0$$

پس w و $\frac{dw}{dx}$ متغیرهای اولیه هستند

V و M نیز متغیرهای ثانویه هستند

شرایط مرزی طبیعی:

$\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\equiv V$ نیروی برشی $=0$ در $x=l$

$b\frac{d^2w}{dx^2}\equiv M$ گشتاور خمشی $=M_0$ در $x=l$

شرایط مرزی اساسی

$$w(0) = 0$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

پس می‌توان گفت چنانچه خیز عرضی در یک نقطه مرزی معین باشد (w) دیگر نمی‌توان در همان نقطه نیروی برشی V را نیز مشخص نمود و بالعکس. همچنین در مورد شیب $\left(\frac{dw}{dx}\right)$ و گشتاور خمشی (M) می‌توان چنین مسأله‌ای را مطرح کرد.

8.5 - روش های تقریبی Variational

در تمام روش های تقریبی ابتدا برای تابع هدف حدسی زده می‌شود.

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \qquad (8.5\text{-}1)$$

توابع پایه یا توابع تقریب : $\phi_j(x), \phi_0(x)$

حال باید به گونه‌ای ضرایب c_j را بیابیم تا حدس زده‌شده به واقعیت نزدیک شود.

① روش ریلی - ریتز

روش ریلی - ریتز به دو صورت انجام می‌شود:

الف - با فرم معادله تضعیف شده

$$B(w,u) = l(w)$$

ب- حدی برای $\tilde{u}$ زده می‌شود

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N} C_j \phi_j + \phi_0$$

ج- در این روش توابع وزن همان توابع تقریب هستند:

$$w_j(x) = \phi_j(x) \qquad (8.5\text{-}2)$$

حال باید این معادله را حل کرد:

$$B(w,u) = l(w)$$

$$B\left(\phi_i , \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0\right) = l(\phi_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

این رابطه N معادله برای یافتن N مجهول c_j به ما می‌دهد.

$$\sum_{j=1}^{N} B(\phi_i , \phi_j)\, c_j = l(\phi_i) - B(\phi_i , \phi_0) \qquad (8.5\text{-}3)$$

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} C_j = F_i \quad \text{یا} \quad [B]\{C\}=\{F\} \qquad (8.5\text{-}4)$$

$$\begin{cases} B_{ij} = B(\phi_i , \phi_j) \\ F_i = l(\phi_i) - B(\phi_i , \phi_0) \end{cases} \qquad (8.5\text{-}5)$$

C_j ها را ضرایب ریتز می‌نامند. هدف یافتن C_j ها است. برای این موضوع باید بتوان $[B]$ را معکوس کرد. لذا باید ستونها (ردیفها) درایه‌های $B_{ij}=B(\phi_i,\phi_j)$ مستقل خطی باشند.

اما اگر تابع پتانسیل ما را داشته باشیم برای حل کردن مسأله باید:

$$\delta I(\tilde{u}) = 0 \qquad (8.5\text{-}6)$$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial C_1}\delta C_1 + \frac{\partial I}{\partial C_2}\delta C_2 + \cdots + \frac{\partial I}{\partial C_N}\delta C_N = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial I}{\partial C_1} = 0 , \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0 , \cdots , \frac{\partial I}{\partial C_N} = 0 \qquad (8.5\text{-}7)$$

با توجه به مطالب گفته شده، برای توابع تقریب ϕ_i در روش ریلی - ریتز می‌توان این شرایط را گذاشت:

۱ - الف) ϕ_i ها باید به اندازه کافی مشتق پذیر باشند که الزام شکل دوخطی $B(\phi_i, \phi_j)$ را ...

ب) ϕ_i ها حداقل باید شکل همگن شرایط مرزی اساسی مسأله را ارضاء نمایند.

۲ - برای هر N عدد از توابع تقریب، مجموعه $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ به همراه ستون‌های (ردیف‌های) $B(\phi_i, \phi_j)$ باید مستقل خطی باشند.

۳ - مجموعه $\{\phi_i\}$ باید کامل باشند.

نقشی که ϕ_0 ایفا می‌کند ارضا شرایط مرزی اساسی غیر همگن است

$$\tilde{u}(x_0) = u_0 \rightarrow \sum c_j \underbrace{\phi_j(x_0)}_{0} + \phi_0(x_0) = u_0 \Rightarrow \phi_0(x_0) = u_0$$