جلسه ۱۴   روش های انرژی   بسم الله الرحمن الرحیم

Chapter $\underline{VIII}$ Direct Methods of Calculus of variations

8.1_Introduction

برای یافتن معادلات حاکم بر کل سازه، دو روش انرژی را معرفی کردیم:

$$I = \int (\underbrace{U}_{\text{انرژی کرنشی}} + \underbrace{W}_{\text{انرژی پتانسیل نیروهای خارجی (منفی کار خارجی)}})\, dV \equiv \text{minimmum}$$

$$I = \int (\underbrace{T}_{\text{انرژی جنبشی}} - \underbrace{V}_{\text{انرژی پتانسیل وزن}})\, dt \equiv \text{minimmum}$$

$$\delta I = 0 \longrightarrow \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad n \text{ معادله}$$

8.2 - چند تعریف

۱- فانکشنال $l(u)$ را برحسب u خطی گویند اگر و فقط اگر

$$l(\alpha u+\beta v)=\alpha\, l(u)+\beta\, l(v)$$

۲- فانکشنال $B(u,v)$ را دوخطی گویند اگر و فقط اگر

$$B(\alpha u_1+\beta u_2\,,v)=\alpha B(u_1,v)+\beta B(u_2,v)$$

(خطی برحسب اولین آرگومان)

$$B(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha B(u,v_1)+\beta B(u,v_2)$$

۳- فانکشنال $B(u,v)$ را برحسب آرگومان‌های u و v متقارن گویند اگر به ازای هر u و v داشته باشیم

$$B(u,v)=B(v,u)$$

8.3 - انتگرال وزنی و تشکیل روابط ضعیف

فرض کنید معادله زیر را داریم

$$L(u) = P \qquad (8.3\text{-}1)$$

مثلاً

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + 4u\frac{du}{dx} + x$$

مقدار باقیمانده را چنین تعریف می‌کنیم

$$R = L(\tilde{u}) - P \qquad (8.3\text{-}2)$$

برای یافتن حالت ضعیف شده مراحل زیر را باید طی کرد:

$\boxed{\text{مرحله اول}}$

عبارت انتگرال وزنی یا باقیمانده وزنی معادله (8.3-1) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int R(\bar{u}) \cdot W(x)\, dV = 0 \qquad (8.3\text{-}3)$$

البته اگر در عبارت فوق مقدار تقریب $\bar{u}$ گذاشته شود دیگر این عبارت برابر صفر نخواهد بود بلکه باید سعی شود تا مینیمم گردد.

مرحله دوم

کم کردن درجه مشتق تابع u در عبارت انتگرال وزنی. این کار با استفاده از روش انتگرال جزء به جزء صورت می‌گیرد.

$$\int_0^L w\, dv = -\int_0^L v\, dw + [w\,v]_0^L \qquad (8.3\text{-}4)$$

به این طریق مشتق‌گیری بین حل تقریبی $\bar{u}$ و تابع وزن توزیع می‌شود.

در این صورت شرایط پیوستگی ضعیف‌تری را روی تابع حدسی زده شده برای $\bar{u}$ ایجاب می‌کند.

توضیح: در روش حل مستقیم اولیه نام حدس تابع ممکن است.

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) + \phi_0(x) \qquad (8.3\text{-}5)$$

حال برای یافتن c_i ها (مجهولات ما) احتیاج به n معادله داریم. برای این منظور $(i=1,\dots,n)$ w_i ها را تعریف می‌کنیم تا n معادله از انتگرال وزنی با قیمانده را داشته باشیم.

در مرحله دوم با استفاده از تکنیک انتگرال جزء به جزء درجه مشتق در معادله را کاهش می‌دهیم. به این طریق میزان پیوستگی لازم برای ϕ_i ها کمتر می‌شود.

ϕ_i ها را توابع تقریب یا توابع پایه می‌نامند.

مثال: $0<x<L$

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = q(x)$$

$$B.C.: \quad u(0) = u_0 , \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = Q_0$$

حل:

$$\int_0^L w(x)\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-q\right]dx=0$$

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}a\frac{du}{dx}-wq\right)dx-\underbrace{\left[wa\frac{du}{dx}\right]_0^L}_{\text{عبارت مرزی}}=0$$

توجه ۱: شکل تابع هدف (u) همان گونه که تابع وزن (w) در عبارت مرزی ظاهر شده است را متغیرهای اولیه (PV) می‌نامند. (دارای شکل u متغیر اولیه است) و مقدار معین یک متغیر اولیه روی مرز را شرط مرزی اساسی (EBC) می‌نامند $(u(0)=1)$.

توجه ۲: شکل تابع هدف (u) به همان گونه که در عبارت مرزی ظاهر شده است را متغیرهای ثانویه (SV) می‌نامند (دارای شکل $\frac{du}{dx}$) و مقدار معین آن روی مرز را شرط مرزی طبیعی (NBC) می‌نامند $\left(\frac{du}{dx}=f_0\right)$. متغیرهای ثانویه همواره دارای مفهوم فیزیکی هستند.

توجه ۲: تنها یکی از شرایط، متغیر اولیه یا ثانویه، را می‌توان در یک نقطه از مرز معین کرد. زیرا ارتباطی بین این دو نوع متغیر وجود دارد که همان معادله فضای حالت سیستم است.

$\boxed{\text{مرحله سوم}}$

شرایط مرزی را در عبارت ضعیف شده، اعمال می‌کنیم:

$$\int_0^L \left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx} - wq\right)dx - w(L)Q_0 = 0$$

دقت شود که تابع وزن w باید شکل همگن شرایط مرزی اساسی را ارضاء نماید. به عبارت دیگر تابع وزن w در نقاط مرزی جایی که شرایط مرزی اساسی معین شده‌اند ($u(0)=u_0$) باید برابر صفر شود. ($w(0)=0$) چرا؟

علت این امر بعدا دیده خواهد شد ولی مختصرا اینکه بعدا می‌گوئیم که w در اصل همان δu است (تغییرات ممکن در u) و می‌دانیم در جایی که $u=u_0$ است در آنجا $\delta u=0$ می‌باشد.

8.4 - یافتن تابع پتانسیل از معادله حاکم (شکل خطی و دوخطی)

در شکل ضعیف شده معادله، دو دسته عبارت را تعریف می‌کنیم:

$B(w,u)$: عبارتهائی که متغیر وابسته u و تابع وزن w هر دو را در بردارند.

$l(w)$: عبارتهائی که تنها تابع وزن را در بردارند:

مثلاً

$$B(w,u)=\int_0^L a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx \qquad (8.4\text{-}1)$$

$$l(w)=\int_0^L wq\,dx+w(L)Q_0$$

می‌توان دید که $B(w,u)$ در پدیده‌های فیزیکی موجود حالت دوخطی دارد و نسبت به u,w متقارن است.

همچنین $l(w)$ خطی است. پس شکل ضعیف شده مساله بصورت زیر خواهد بود

$$B(w,u)=l(w) \tag{8.4-2}$$

حال اگر $w=\delta u$ درنظر بگیریم داریم:

$$B(\delta u,u)-l(\delta u)=0 \tag{8.4-3}$$

اگر B قرینه و دوخطی باشد می‌توان نوشت

$$\delta\left[\tfrac{1}{2}B(u,u)\right]-\delta\left[l(u)\right]=0 \tag{8.4-4}$$

$$\delta I(u)=0 \tag{8.4-5}$$

که

$$\boxed{I(u)=\tfrac{1}{2}B(u,u)-l(u)} \tag{8.4-6}$$

بجای w مقدار u می‌گذاریم و $\tfrac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

I همان تابع پتانسیل مساله است که با استیشنری قراردادن آن می‌توان به معادله حاکم رسید. توجه شود که تمام کلید در استخراج

فانکشنال $I(x)$ از شکل منفی شده، دوخطی و متقارن بودن B است.