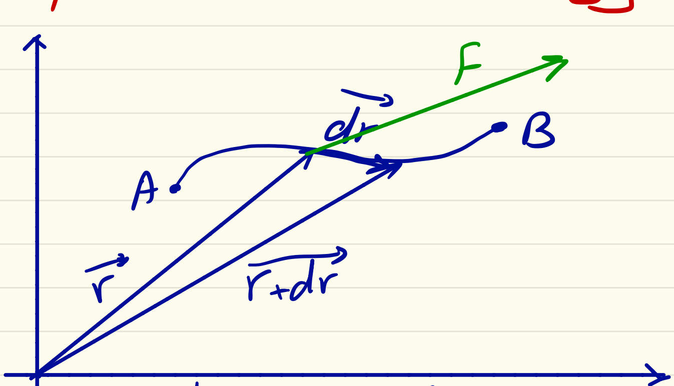
بسم الله الرحمن الرحیم　　ردش های انرژی　　جلسه ۱۷

Chapter IX

Energy Principles of Structural Mechanics

9.1. Consepts of Work and Energy



یک ذره مادی را درنظر بگیرید

این ذره تحت نیروی $\vec{F}$ از نقطه A به نقطه B می مسیر نشان داده شده حرکت می کند. برای یک بازه کوچک $\vec{dr}$ یا $\vec{du}$ (جابجائی) کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ چنین تعریف می شود:

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dr} \equiv F_1\,du_1 + F_2\,du_2 + F_3\,du_3 \qquad (۹.۱-۱)$$

کل کار انجام شده توسط نیروی F در مسیر A تا B برابر است با:

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{du} \qquad (۹.۱-۲)$$

دقت شود که اگر جهت نیرو جابجائی مخالف هم باشند کار انجام شده منفی خواهد بود.

با توجه به مفاهیم ضرب داخلی دیده می‌شود که کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد یعنی:

$$W = W_B - W_A \qquad (۹.۱-۳)$$

همچنین کار انجام شده توسط یک ممان (کوپل، زوج نیرو) در یک چرخش کوچک چنین خواهد بود:

$$dw = \vec{M}\cdot\vec{d\theta} = M_1\,d\theta_1 + M_2\,d\theta_2 + M_3\,d\theta_3$$

(۹.۱-۴)

$$\rightarrow \quad W = \int_A^B \vec{m} \cdot d\vec{a} \qquad (9.1-5)$$

از رابطه (9.1-1) می توان گفت که نرخ کار انجام شده (کار انجام شده در واحد زمان) در بازه کوچک $d\vec{u}$ برابر است با $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$ و از طرفی $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{v}$ همان سرعت ذره است. لذا نرخ کار انجام شده برابر است با $\vec{F} \cdot \vec{v}$. یعنی

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{u} = (\vec{F} \cdot \vec{v})\, dt \qquad (9.1-6)$$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \qquad (9.1-7)$$

می توان تعمیم داد و گفت کار انجام شده توسط یک جسم مادی برابر است با مجموع کارهای انجام شده توسط ذرات آن.

کار انجام شده توسط ذره می تواند در اثر نیروهای خارجی یا داخلی باشد.

$$W = W_I + W_E \qquad (9.1-8)$$

اگر جسم تحت نیروهای نقطه‌ای $\vec{F}^1, \vec{F}^2, \dots, \vec{F}^n$ باشد و آن نقاط جابجایی‌های $\vec{\Delta r}_1, \vec{\Delta r}_2, \dots, \vec{\Delta r}_n$ داشته باشند، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی روی جسم طی زمان Δt برابر خواهد بود با:

$$W_E = -\sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i \cdot \vec{\Delta r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i \cdot \vec{v}_i \, \Delta t \qquad (9.1-9)$$

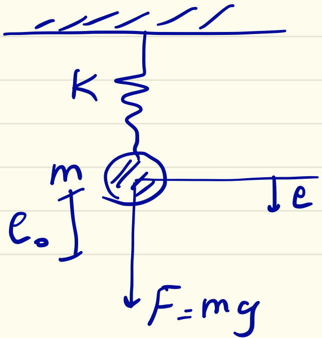
علامت منفی بیانگر این است که کار انجام شده روی جسم، منفی کار ذخیره شده در جسم است

وقتی Δt به سمت صفر میل کند جمع تبدیل به انتگرال می‌شود. در این حالت اگر $\vec{F}$ نیروی وارد بر ذرات جسم یا به عبارتی نیروی حجمی باشد آنگاه:

$$W_E = -\int_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{u}) \, d\Omega \qquad (9.1-10)$$

W_e گاهی اوقات انرژی پتانسیل حاصل از اعمال نیروهای خارجی نامیده می‌شود و با V نمایش داده می‌شود. در حالت کلی کار انجام شده توسط نیروهای داخلی برابر با کار انجام شده توسط نیروهای خارجی (انرژی پتانسیل حاصل از نیروهای خارجی) نیست (مسئله انرژی جنبشی)

ولی وقتی جسم در حالت تعادل است در صورتی که نیروهای داخلی و خارجی تحت تغییر شکل های مجاز کوچکی imaginal infinitesimal displacement/rotation قرار گیرند مجموع کار انجام شده توسط ذرات در اثر نیروهای داخلی و خارجی برابر صفر است (کار انجام شده توسط ذرات در اثر نیروهای خارجی برابر با منفی کار انجام شده توسط نیروهای داخلی است).

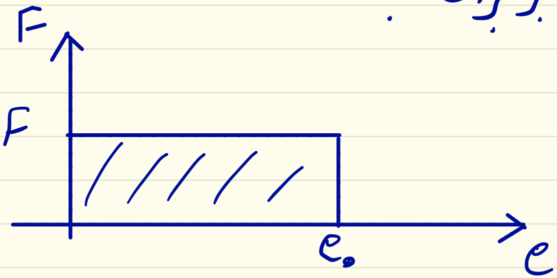


برای روشن شدن موضوع جرم و فنر زیر را در نظر بگیرید:

اگر نیروی F بصورت استاتیکی وارد شود:

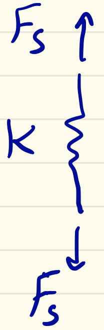
نیروی خارجی F به میزان e جابجایی دارد لذا

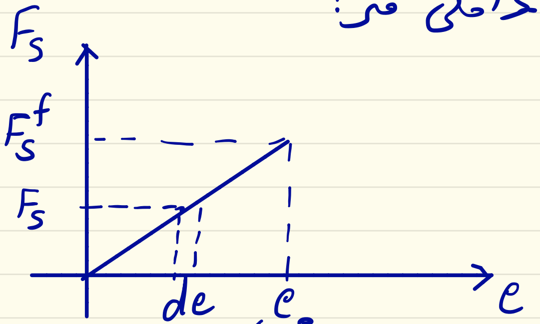
کار انجام شده توسط نیروی خارجی برابر است با:



$$W_E = -(F e_0)$$

ولی کار انجام شده توسط نیروی داخلی فنر:





چون میزان نیروی داخلی F_s بستگی به e دارد پس برای یک المان کوچک de کار انجام شده برابر با $F_s\,de$ می باشد لذا کل کار انجام شده تا جابجائی e_0 برابر است با:

$$W_I = \int_0^{e_0} F_s(e)\,de$$

که اگر $F_s = ke$ باشد داریم:

$$W_I = \frac{1}{2} k e_0^2$$

می بینیم که برای جابجائی های بزرگ کار انجام شده توسط نیروهای خارجی و داخلی برابر نیستند

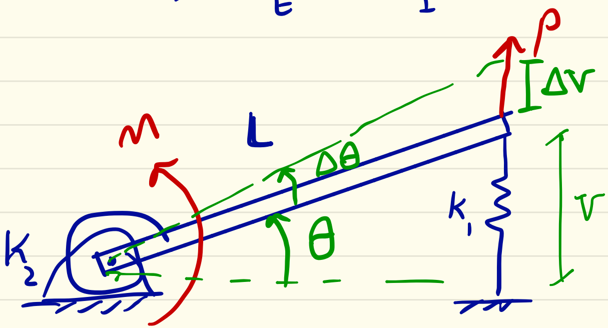
ولی اگر در حالت تعادل باشیم و تغییر شکل به $e_0 + \Delta e$ افزایش یابد:

$$\Delta W_E = -F\Delta e = -mg\Delta e$$

$$\Delta W_I = F_s \Delta e = k e_0 \Delta e$$

چون $F = F_s$ است پس

$$\Rightarrow \Delta W_E = \Delta W_I$$



مثال:

درحالت بدون بار $\theta = 0$ است و

θ کوچک میباشد.

از حالت تعادل به اندازه $\Delta\theta$ تغییر ایجاد می‌کنیم.

$$\Delta W_E = -\left(P\Delta v + M\Delta\theta\right)$$

$$= -\left\{PL\left[\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin(\theta)\right] + M\Delta\theta\right\}$$

$$\approx -PL\left(\theta+\Delta\theta-\theta\right) - M\Delta\theta = -(PL+M)\Delta\theta$$

$$\Delta W_I = F_s\Delta v + M_s\Delta\theta$$

$$= k_1 v\,\Delta v + k_2\theta\,\Delta\theta$$

$$\approx (k_1L^2 + k_2)\,\theta\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \quad \Delta W_I = -\Delta W_E$$

$P = k_1 L\theta, \quad M = k_2\theta$ چون

به عبارت دیگر

$$\Delta W_I + \Delta W_E = 0$$