بسم الله الرحمن الرحیم　　　روش های انرژی　　　جلسه ۱۳

7.6- Integral Principle of Motion

جسم جامدی تحت نیروی جرمی $f_i(x_1,x_2,x_3,t)$ و بارگذاری سطحی $\sigma_i(x_1,x_2,x_3,t)$ را در نظر بگیرید. بیان انتگرالی معادلات حرکت چنین است.

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S}\sigma_i\,\delta u_i\,ds\,dt}_{\text{کار نیروهای سطحی}}+\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V} f_i\,\delta u_i\,dv\,dt}_{\text{کار نیروهای حجمی}}=\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V}\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv\,dt}_{\text{تغییرات انرژی کرنشی}}$$

$$-\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{V}\rho\,\dot{u}_i\,\delta\dot{u}_i\,dv\,dt}_{\text{تغییرات انرژی جنبشی}}\qquad(7.6\text{-}1)$$

این رابطه را generalized Hamilton's Principle می‌نامند.

می‌دانیم

انرژی جنبشی $T = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \, dv$ (7.6-2)

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta T \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \, \delta \dot{u}_i \, dv \, dt \qquad (7.6\text{-}3)$$

حال با انتگرال جزء به جزء می‌توان نوشت (با در نظر گرفتن $\delta u_i = 0$ در t_1, t_2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \, \delta \dot{u}_i \, dv \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho \ddot{u}_i \, \delta u_i \, dv \, dt \qquad (7.6\text{-}4)$$

(7.6-3), (7.5-8), (7.5-5), (7.6-1) $\Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta V + \delta U - \delta T \right) dt = 0 \qquad (7.6\text{-}5)$$

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0} \qquad (7.6\text{-}6)$$

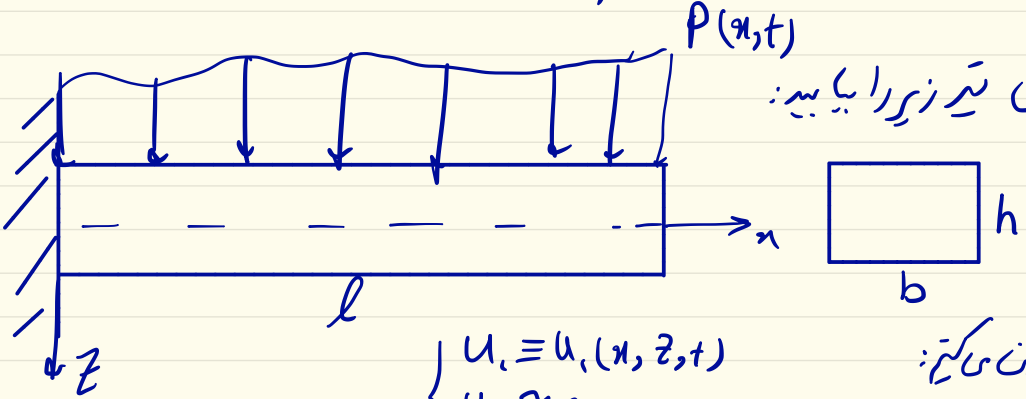
به عبارت دیگر

$$L = T - \underbrace{(V+U)}_{\pi} \qquad (7.6\text{-}7)$$

Lagrangian (function)

رابطه (7.6-6) را به اصل همیلتون (Hamilton's Principle) معروف است.

مثال: معادله ارتعاشی تیر زیر را بیابید:



فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, z, t) \\ u_2 \approx 0 \\ u_3 = u_3(x, z, t) \end{cases}$$

با بسط تیلور داریم:

$$\begin{cases} u_1(x,z,t) = u_1(x,z,t)\Big|_{z=0} + z\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{z=0} + z^2\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \cdots \\[2ex] u_3(x,z,t) = u_3(x,z,t)\Big|_{z=0} + z\dfrac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{z=0} + z^2\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = u(x,t) + z\,\psi(x,t) + z^2\phi(x,t) + \cdots & (7.6\text{-}8) \\ u_2 \approx 0 & (7.6\text{-}9) \\ u_3 = w(x,t) + z\,\eta(x,t) + z^2\xi(x,t) + \cdots \end{cases}$$

اگر فقط در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} u_1 = u(x,t) + z\,\psi(x,t) \\ u_2 = 0 & (7.6\text{-}10) \\ u_3 = w(x,t) \end{cases}$$

به این تئوری، تئوری درجه اول برشی (تئوری تیموشنکو) گفته می‌شود.

از طرف دیگر اگر رابطه کرنش جابجایی را چنین در نظر بگیریم:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} \\
2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} \\
2\varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \\
2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial y}
\end{aligned}
\right.
\qquad (7.6\text{-}11)
$$

به این غیرخطی بودن هندسی، فرضیات فون کارمن (Von Karman) می‌گویند.

با جایگزاری (7.6-10) در (7.6-11) داریم:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1^\circ + z K_1 \quad , \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \qquad (7.6\text{-}12)$$

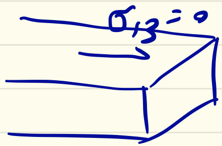
$$2\varepsilon_{12} = 0 \quad , \quad 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5^\circ \quad , \quad 2\varepsilon_{23} = 0$$

که در آن

$$\varepsilon_1^\circ = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad K_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_5^\circ = \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (7.6\text{-}13)$$

حال مسأله را در شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید

$$\sigma_{13}\Big|_{z=-h/2} = \sigma_{13}\Big|_{z=+h/2} = 0 \qquad (7.6\text{-}14)$$



با توجه به قانون هوک می‌توان گفت

$$\varepsilon_{13}\Big|_{z=-h/2} = \varepsilon_{13}\Big|_{z=+h/2} = 0$$

لذا خواهیم رسید به:

$$\psi = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

یعنی

$$\begin{cases} u_1 = u(x,t) - z\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = w(x,t) \end{cases} \quad (7.6\text{-}17)$$

بنابراین

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1^{\circ} + z k_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{23} = 0 \end{cases} \quad (7.6\text{-}18)$$

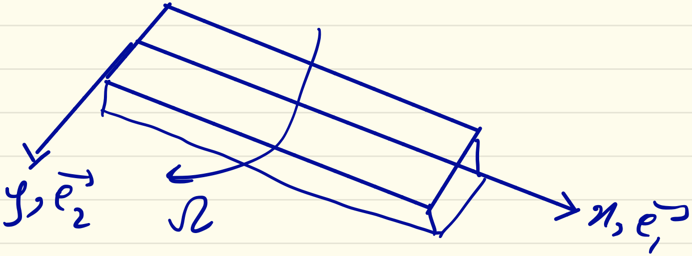
که در آن

$$\varepsilon_1^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7.6\text{-}19)$$

روابط

تئوری تیری که بصورت (7.6-19) بیان می‌شود به تئوری تیر کلاسیک یا اویلر برنولی شناخته می‌شود.

حال فرض کنید تیر با سرعتی $\vec{\omega} = \Omega \vec{e}_3$ در حال دوران باشد ($\vec{e}_3$ همان محور z است)



$$\vec{r} = (x+u_1)\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + (z+u_3)\vec{e}_3 \qquad (7.6\text{-}20)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{u}_1 \vec{e}_1 + \dot{u}_3 \vec{e}_3 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= (\dot{u}_1 - y\Omega)\vec{e}_1 + \Omega(x+u_1)\vec{e}_2 + \dot{u}_3 \vec{e}_3 \qquad (7.6\text{-}21)$$

از طرف دیگر توجه داشته باشید که:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \iiint_V \frac{1}{2} \rho\, \vec{v} \cdot \vec{v}\, dv\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho\, v_i\, \delta v_i\, dv\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left[(\dot{u}_1 - y\Omega)\,\delta\dot{u}_1 + \Omega^2(x+u_1)\,\delta u_1 + \dot{u}_3\,\delta\dot{u}_3\right] dv\,dt \qquad (7.6\text{-}22)$$

با قرار دادن (7.6-17) در رابطه (7.6-22) و انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T\,dt = b\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{l} \Big[(I_1\Omega^2 x + I_1\Omega^2 u + I_1\ddot{u})\,\delta u$$
$$+ (I_3\,\ddot{w}_{,xx} - I_3\,\Omega^2 w_{,xx} - I_1\ddot{w})\,\delta w\Big]\,dx\,dt$$
$$+ b\int_{t_1}^{t_2}\Big[I_3(\Omega^2 w_{,x} - \ddot{w}_{,x})\,\delta w\Big]\Big|_{x=l}\,dt \qquad (7.6\text{-}23)$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\,dz = \rho h \quad , \quad I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2\,dz = \frac{1}{2}\rho h^3$$ که درآن

$$(7.6\text{-}24)$$

حال فرض کنید نیروی $P(x,t)$ بصورت نیرو در واحد طول به تیر وارد شود.

$$\iint_S \sigma_i\, \delta u_i\, ds = \iint_S \sigma_3\, \delta u_3\, ds = \int_0^{l}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{P}{b}\, \delta w\, dy\, dx = \int_0^{l} P\, \delta w\, dx \qquad (7.6\text{-}25a)$$

$$\iiint_V f_i\, \delta u_i\, dv = \iiint_V f_3\, \delta u_3\, dv = \int_0^{l}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} \rho g\, \delta w\, dz\, dy\, dx = b\int_0^{l} I_1 g\, \delta w\, dx \qquad (7.6\text{-}25b)$$

همچنین از $(7.6\text{-}18)$ داریم:

$$\iiint_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dv = \int_0^{l}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\left(\delta \varepsilon_1^{0} + z\, \delta K\right) dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{l} \left(N_{11}\, \delta \varepsilon_1^{0} + M_{11}\, \delta K_1\right) dx \qquad (7.6\text{-}26)$$

که در آن

$$(N_{11}, M_{11}) = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(l, z)\, dz\, dy \qquad (7.6\text{-}27)$$

حال (7.6-19) را در (7.6-26) قرار می‌دهیم:

$$\iiint_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv = \int_0^l \left\{-\frac{\partial N_{11}}{\partial x}\delta u - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}\right]\delta w\right\}dx$$

$$+\left[N_{11}\,\delta u\right]\Big|_{x=l} + \left\{\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x}+N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\right\}\Big|_{x=l} - \left[M_{11}\,\delta w_{,x}\right]\Big|_{x=l} \qquad (7.6\text{-}28)$$

با قرار دادن (7.6-28) و (7.6-25) و (7.6-23) در رابطه اصلی (7.6-1) داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left\{\left[\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + I_1 b\left(x\Omega^2 + \Omega^2 u - \ddot{u}\right)\right]\delta u\right.$$

$$+\left[\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + P(x,t) + bI_1 g + bI_3\left(\ddot{w}_{,x} - \Omega^2 w_{,xx}\right)$$

$$\left. - I_1 b\ddot{w}\right]\delta w\Big\}\,dx\,dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-[N_{11}\,\delta u]\Big|_{x=l}-\Big[\Big(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial M_{11}}{\partial x}\Big)\delta w\Big]\Big|_{x=l}+[M_{11}\,\delta w_{,x}]\Big|_{x=l}$$

$$+\{b I_3(\Omega^2 w_{,x}-\ddot{w}_{,x})\,\delta w]\Big|_{x=l}\Big\}dt=0 \qquad (7.6\text{-}29)$$

لذا داریم:

$$\delta u:\quad \frac{\partial N_{11}}{\partial x}=I_1 b(\ddot{u}-\Omega^2 u)-I_1 b\,\Omega^2 x \qquad (7.6\text{-}30a)$$

$$\delta w:\quad \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+P(x,t)+I_1 b g=I_1 b\ddot{w}+I_3 b(\Omega^2 w_{,xx}-\ddot{w}_{,xx}) \qquad (7.6\text{-}30b)$$

و شرایط مرزی:

$$N_{11}=0\,,\quad N_{11}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial M_{11}}{\partial x}-bI_3(\Omega^2 w_{,x}-\ddot{w}_{,x})=0\,,\quad M_{11}=0$$

$(7.6\text{-}31)$ at $x=l$

با فرض $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ داریم:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E\varepsilon_1^0 + Ezk_1 \qquad (7.6\text{-}32)$$

که ε_1^0 و k_1 در رابطه (7.6-19) آمده‌اند. با قرار دادن (7.6-32) در

رابطه (7.6-27) داریم:

$$\begin{cases} N_{11} = Ebh\,\varepsilon_1^0 = Ebh\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\[2ex] M_{11} = E\dfrac{bh^3}{12}k_1^0 = -E\dfrac{bh^3}{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases} \qquad (7.6\text{-}33)$$

با قرار دادن (7.6-33) در (7.6-30) به معادله حرکت خواهیم رسید