بسم الله الرحمن الرحیم　　　　روش های انرژی　　　　جلسه ۱۲

Chapter VII - Introduction to Continuous Systems

7.1 - Introduction

در این بخش مقداری به علم محیط پیوسته و مختصراً معادلات تعادل و حرکت در محیط های پیوسته پرداخته می شود. این بررسی ها برای یافتن روش های تقریبی و مهمتر از آن اثبات اصول اساسی روش انرژی مفید است.

7.2 - Kinetics

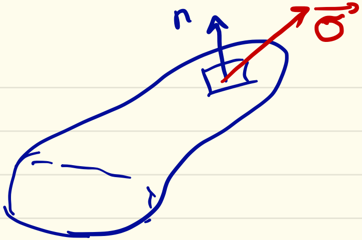
در علم مکانیک محیط پیوسته معادله حرکت برای یک المان کوچک (معادله دیفرانسیلی حرکت) چنین بیان می شود:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad i=1,2,3$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma} + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}}\right) \qquad (7.2\text{-}1)$$

σ_{ij} : تانسور تنش　　　　$\vec{u}$: جابجایی

f_i : نیروی حجمی body force　　　　ρ : جرم حجمی



همچنین رابطه کوشی چنین بیان می‌شود:

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\sigma}^{t} \cdot \vec{n}$$

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$$

$\vec{\sigma}$: بردار تنش stress vector

و روابط تعادل عبارتست از:
(7.2-3)

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

7.3- Kinematic

تانسور کرنش گرین چنین تعریف می‌شود

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \quad (7.3\text{-}1)$$

(Lagrangian) Green finite strain

برای تغییر شکل های کوچک

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (7.3\text{-}2)$$

7.4- Constitutive Law (روابط هوک)

در اجسام الاستیک خطی، تانسور تنش و تانسور کرنش بصورت خطی به هم مرتبط هستند:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad (7.4\text{-}1)$$

C_{ijkl} : Stiffness tensor (ماتریس سفتی)

اگر ماده ایزوتروپیک باشد رابطه چنین می‌شود:

$$C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \kappa(\delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (7.4\text{-}22)$$

Kronecker-delta: δ_{ij}

λ, μ, κ : سه پارامتر اسکالر هستند که اگر تانسور تنش و کرنش متقارن باشند $\kappa = 0$

$$\xrightarrow{K=0} \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (7.4-3)$$

$$\xrightarrow{(7.4-1)} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \qquad (7.4-4)$$

μ و λ را ثابت‌های لامه می‌نامند.

$$\mu = G \,, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (7.4-5)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \,, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} . \qquad (7.4-6)$$

$$\longrightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right] \qquad (7.4\text{-}7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (7.4\text{-}8)$$

به عبارت دیگر

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (7.4\text{-}9)$$

معادلات نویر همان معادلات حرکت هستند که برحسب جابجائی ها نوشته شده‌اند:

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (7.4\text{-}10)$$

Navier Eq.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

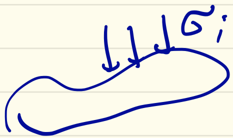
اپراتور لاپلاسی

میان‌ترم ۹,۱۱
جمعه 10:30

7.5- Integral Principle of Equilibrum

جسمی را در نظر بگیرید که تحت نیروی جرمی f_i و بارگذاری σ_i بر روی سطوحش باشد.

اگر جسم در حال تعادل باشد بنا بر اصل کار مجازی داریم:



$$\iint_S \sigma_i \, \delta u_i \, ds + \iiint_V f_i \, \delta u_i \, dV = \iiint_V \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, dV \qquad (7.5\text{-}1)$$

Integral Principle of Equilibrum

این رابطه برای تمام تغییرات ممکن δu_i برقرار است.

اصل مینیمم انرژی پتانسیل

دوباره به معادله تعادل انتگرالی باز می‌گردیم (7.5-1) را

Green رابطه انرژی کرنشی را چنین تعریف کرد:

انرژی کرنشی در واحد حجم

$$U_0 = \frac{1}{2} C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \qquad (7.5\text{-}2)$$

از طرف دیگر می‌دانستیم:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \qquad (7.5\text{-}3)$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (7.5\text{-}4)$$

پس می‌توان گفت:

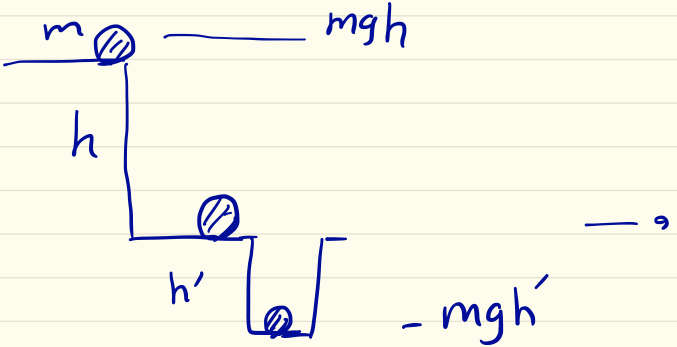
$$\iiint_V \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dv = \iiint_V \overbrace{\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}\, \delta\varepsilon_{ij}}^{\delta U_0}\, dv = \delta U \qquad (7.5\text{-}5)$$

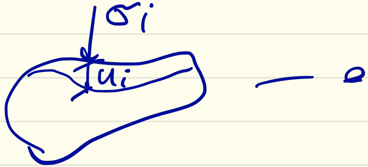
که در آن

انرژی کرنش کل جسم $U = \iiint_V U_0 \, dV$

همچنین انرژی پتانسیل نیروهای خارجی چنین تعریف شده‌اند:

$$V = -\iint_S \sigma_i u_i \, ds - \iiint_V f_i u_i \, dV \qquad (7.5-7)$$





$$\delta V = -\iint_S \sigma_i \, \delta u_i \, ds - \iiint_V f_i \, \delta u_i \, dV \qquad (7.5-8)$$

$$\frac{(7.5-5,8)}{(7.5-1)} \longrightarrow \boxed{\delta(U+V) \equiv \delta(\Pi) = 0} \qquad (7.5-9)$$

$\Pi = U + V$ انرژی پتانسیل کل سیستم (7.5-10)

رابطه (7.5-9) بیانگر اصل مینیمم انرژی پتانسیل در یک سیستم است.