بسم الله الرحمن الرحیم   روش های انرژی   جلسه ۱۱

$$\xrightarrow{(6.3-6)} \quad I(\tilde{y}) = \tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon_1\eta_1+\epsilon_2\eta_2, y'+\epsilon_1\eta_1'+\epsilon_2\eta_2')\,dx \qquad (6.3-8)$$

می دانیم

$$\delta^{(1)} I = \epsilon_1 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1=0\\ \epsilon_2=0}} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_2}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1=0\\ \epsilon_2=0}} = 0 \qquad (6.3-9)$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\epsilon_1\eta_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\epsilon_2\eta_2\right]dx = 0 \qquad (6.3-10)$$

$$\xrightarrow{(6.3-7)} \int_{x_1}^{x_2} \left[\phi(x,y,y') + \frac{\partial \phi}{\partial y}(\epsilon_1\eta_1+\epsilon_2\eta_2) + \frac{\partial \phi}{\partial y'}(\epsilon_1\eta_1'+\epsilon_2\eta_2') + O(\epsilon^2)\right]dx = \ell$$

$$(6.3-11)$$

$$(6.3\text{-}2) - (6.3\text{-}11) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \epsilon_1 \eta_1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \epsilon_2 \eta_2 \right\} dx = 0 \qquad (6.3\text{-}12)$$

حال (6.3-12) را در پارامتر λ ضرب می‌کنیم و با (6.3-10) جمع می‌کنیم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} \right] \epsilon_1 \eta_1 + \left[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} \right] \epsilon_2 \eta_2 \right\} dx = 0 \qquad (6.3\text{-}13)$$

که داریم

$$F^* = F + \lambda \phi$$

حال فرض می‌کنیم می‌توانیم λ را به گونه‌ای پیدا کنیم که براکت اول را صفر کند (لذا براکت دوم نیز صفر می‌شود)

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'} = 0} \qquad (6.3\text{-}15)$$

این رابطه با رابطه قید (6.3-2) به ما $\lambda(x)$ و $y(x)$ را خواهد داد.

رابطه (6.3-15) به ما پیشنهاد می دهد که مسئله را با یکی از این روشها حل کنیم:

I $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}[\delta F+\lambda\,\delta\phi]\,dx=0$ (multiplier rule) (6.3-16)

یا مسئله آزاد زیر را حل کنیم

II $$\delta\int_{x_1}^{x_2}(F+\lambda\phi)\,dx=0 \qquad (6.3-17)$$

III در روش دیگر یک پارامتر جدید زیر را تعریف می کنیم:

$$z(x)=\int_{x_1}^{x}\phi(x,y,y')\,dx \qquad (6.3-18)$$

بنابراین $z(x_1)=0\,,\quad z(x_2)=l \qquad (6.3-19)$

$$\rightarrow \quad z'(x)=\phi(x,y,y') \qquad (6-3-20)$$

پس مسأله را اینگونه تعریف می‌دهیم:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y')\, dx = 0 \qquad (6.3\text{-}21a)$$

Constraint $\quad \phi(x, y, y') - z'(x) = 0 \qquad (6.3\text{-}21b)$

حال با توجه به آموخته‌های قبلی این مسأله را با استفاده از multiplier rule می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\delta F + \lambda(\delta\phi + \delta z') \right] dx = 0 \qquad (6.3\text{-}22)$$

یا مسأله آن را داریم:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \left[F + \lambda(\phi - z') \right] dx = \delta \int_{x_1}^{x_2} F^*(x, y, \lambda, y', z')\, dx = 0 \qquad (6.3\text{-}23)$$

$$\delta z: \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial f^*}{\partial z'} = 0 \longrightarrow \frac{d\lambda}{dx} = 0 \qquad (6.3\text{-}24a)$$

$$\delta y: \quad \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f^*}{\partial y'} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = 0$$

$$(6.3\text{-}24b)$$

$$\delta \lambda: \quad \frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow \phi - z'(x) = 0 \qquad (6.3\text{-}24c)$$

رابطه (6.3-24a) بیان می کند که λ یک مقدار ثابت دارد. از رابطه (6.3-24b) می توان رسید:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = 0$$

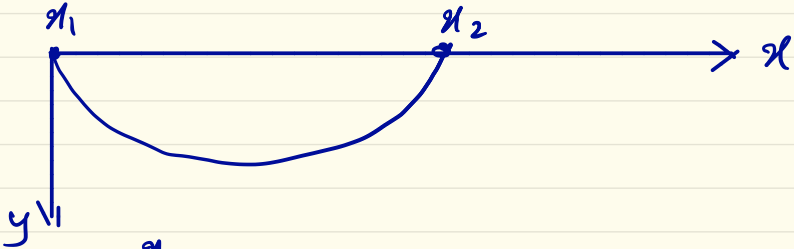
که همان رابطه (6.3-15) است.

همچنین رابطه (6.3-24c) نیز همان رابطه قید است

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x, y, y')\, dx = l \qquad (6.3\text{-}26)$$

Example 1:

بار دیگر مسأله طناب آویخته شده بین دو نقطه را در نظر بگیرید



$$y(x_1)=y(x_2)=0 \qquad (6.3\text{-}30)$$

انرژی پتانسیل

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\rho g y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (6.3\text{-}27)$$

$$\delta I=0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \qquad (6.3\text{-}28)$$

$$\longrightarrow y y''-y'^2-1=0 \qquad (6.3\text{-}29)$$

این معادله در حالت کلی قابل حل نیست. مگر آنکه طول طناب مقید شود.

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \qquad (6.3\text{-}31)$$

حل:
$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y'} = 0 \qquad (6.3\text{-}32)$$

$$F^* = F + \lambda\phi = \rho g\, y(1+y'^2)^{1/2} + \lambda(1+y'^2)^{1/2} \qquad (6.3\text{-}33)$$

$F^* \equiv F^*(y,y') \longrightarrow$ انتگرال اول: $-F^* + y'\dfrac{\partial F^*}{\partial y'} = C_1$ (6.3-34)

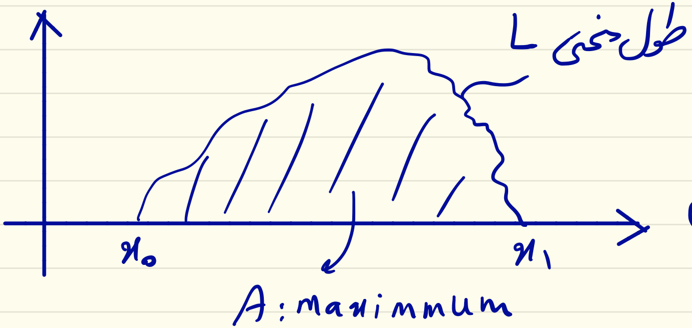
$$\xrightarrow[(6.3\text{-}33)]{(6.3\text{-}34)} \quad \frac{y-\bar\lambda}{(1+y'^2)^{1/2}} = A \qquad (6.3\text{-}35)$$

که در آن $\bar\lambda = \dfrac{\lambda}{\rho g}$ and $A = -\dfrac{C_1}{\rho g}$

$$\rightarrow \quad y(x) = \bar\lambda + A\cosh\left(\frac{x-B}{A}\right) \qquad (6.3\text{-}36)$$

حال با استفاده از (6.3-30), (6.3-31) می‌توان $\bar\lambda, A, B$ را یافت

Example 2: Maximal area under curve with given length



$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} y(x)\,dx \quad \text{extremum}$$

Constraint: $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{g(x,y,y')}\,dx = L$

$$h(x,y,\lambda,y') = F+\lambda g = y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} h(x,y,\lambda,y')\,dx \qquad \text{extremum}$$

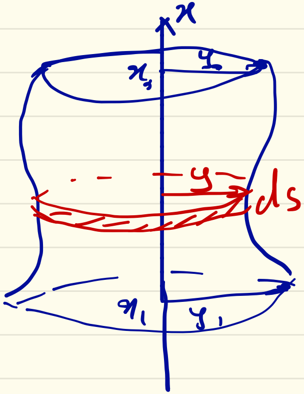
Euler's Eq.: $1-\lambda\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$

$$\rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x-C_1 \rightarrow dy = \pm\frac{x-C}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}\,dx$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2$$

$$\longrightarrow \quad (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \quad ; \quad \text{Circle}$$

Example 3: Minimal surface of revolution:



$$S = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \ell$$

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right)$$

Example 4: Linearization of second order Problem

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'')\,dx \qquad \text{extremum}$$

$$I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, z') \qquad : \text{extremum}$$

Constraint: $z(x) = y'(x)$ or $g(x, y, z) = z - y' = 0$

$$h(x, y, z, z', \lambda) = f(x, y, z, z') + \lambda(x)\,(z - y')$$

$$\int_{x_0}^{x_1} h\,dx \qquad : \text{extremum}$$

Euler's Eq.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial h}{\partial y'} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{d\lambda}{dx} = 0 & \mathrm{I} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial h}{\partial z'} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial z'} = 0 & \mathrm{II} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial h}{\partial \lambda'} = z - \lambda' = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$$

$$\mathrm{II} \longrightarrow \lambda = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} - \frac{\partial f}{\partial z} \Longrightarrow \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial z'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$$

که همان معادله اویلر حالت مشتق درجه ۲ است.