بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۱۰

یک مسأله هلونومیک را در نظر بگیرید:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}11)$$

$$\text{with} \quad \phi(t, q_1, q_2) = 0 \qquad (6.2\text{-}12)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right]\delta q_1 + \left[\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right]\delta q_2 \right\} dt = 0 \qquad (6.2\text{-}13)$$

البته با این فرض که $\delta q_i(t_j) = 0$ نوشته شده است.

حال اینجا دیگر $\delta q_1, \delta q_2$ مستقل خطی نیستند تا بتوان گفت ضریب هر کدام صفر است. این دو با رابطه زیر به هم وابسته هستند:

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \phi}{\partial q_2}\delta q_2 = 0 \qquad (6.2\text{-}14)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \delta q_2 \right) dt = 0 \qquad (6.2\text{-}15)$$

$\lambda(t)$: یک تابع دلخواه (Lagrang's multiplier)

$$\xrightarrow[6.2\text{-}13]{6.2\text{-}15} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right] \delta q_1 + \left[\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right] \delta q_2 \right\} dt = 0 \qquad (6.2\text{-}16)$$

حال در عین حال که به عمومیت L و q_1 و q_2 دست نمی‌زنیم $\lambda(t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که کروشه اول صفر شود. پس طبق قضیه اساسی حساب تغییرات کروشه دوم هم باید صفر شود. پس:

$y=ax+b$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_i} = 0 \qquad (6.2\text{-}17)$$

with constraint $\phi(t, q_1, q_2) = 0$ (6.2-18)

پس ما سه معادله $(6.2\text{-}17)$, $(6.2\text{-}18)$ با سه مجهول $q_1(t), q_2(t), \lambda(t)$ را داریم.

حال یک پارامتر جدید را چنین معرفی می کنیم:

$$L^* = L + \lambda \phi \equiv L^*(t, q_1, q_2, \lambda, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \qquad (6.2\text{-}19)$$

و یک مسئله حساب تغییرات جدید:

$$\delta I^* = \delta \int_{t_1}^{t_2} L^* \, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}20)$$

$$\to \delta I^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L^*}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial L^*}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 \right) dt = 0$$

(6.2-21)

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L^*}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1}\right]\delta q_1 + \left[\frac{\partial L^*}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2}\right]\delta q_2 + \frac{\partial L^*}{\partial \lambda}\delta \lambda \right\} dt = 0 \qquad (6.2\text{-}22)$$

چون $\delta\lambda$ و δq_2 و δq_1 مستقل از هم هستند

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i=1,2 \\ &\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = \phi(t, q_1, q_2) = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(6.2\text{-}23a) \\ &(6.2\text{-}23b) \end{aligned}$$

که همان معادلات (6.2-18) و (6.2-17) هستند. ولی با انتخاب L^* یک مسأله آزاد حساب تغییرات را حل کردیم.

در حالت کلی

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\, dt \qquad (6.2\text{-}25)$$

$$\text{with} \quad \phi_i(t, q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m < n \qquad (6.2\text{-}26)$$

برای حل این مسأله می‌توان چنین بیان کرد:

$$\delta I^* = \int_{t_1}^{t_2} \delta L^* \, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}27)$$

$$\boxed{L^* = L + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi_j} \qquad (6.2\text{-}28)$$

حاصل $n+m$ معادله اویلر خواهد بود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = 0 & i = 1, \ldots, n \qquad (6.2\text{-}29a) \\[2ex] \dfrac{\partial L^*}{\partial \lambda_i} = \phi_i = 0 & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$(6.2\text{-}29b)$$

حال به حل یک مسأله nonholonomic می‌پردازیم:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(t, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}30)$$

with $$a_1(t, q_1, q_2)\,\dot{q}_1 + a_2(t, q_1, q_2)\,\dot{q}_2 + a_t(t, q_1, q_2) = 0 \qquad (6.2\text{-}31)$$

این قید را بصورت pfaffian نیز می‌توان نوشت

$$a_1(t, q_1, q_2)\, dq_1 + a_2(t, q_1, q_2)\, dq_2 + a_t(t, q_1, q_2)\, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}32)$$

فرض بر این است که این رابطه قابل انتگرال‌گیری نیست (یعنی قابل تبدیل شدن به holonomic نیست). شرایط انتگرال‌پذیری عبارتست از:

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} = \frac{\partial a_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{\partial a_t}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} = \frac{\partial a_t}{\partial q_2} \qquad (6.2\text{-}33)$$

بطور مثال قید معرفی شده در مثال قبل (روابط 6.2-10) انتگرال پذیرند.

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y} \qquad \text{(برقرارند)}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{\partial a_t}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} = \frac{\partial a_t}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} = \frac{\partial a_t}{\partial z} \qquad (6.2\text{-}34)$$

حال داریم:

$$\xrightarrow{6.2\text{-}32} \quad a_1(t, q_1, q_2)\,\delta q_1 + a_2(t, q_1, q_2)\,\delta q_2 = 0 \qquad (6.2\text{-}35)$$

$$\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\left(a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2\right) dt = 0 \qquad (6.2\text{-}36)$$

$$\xrightarrow[6.2\text{-}30]{6.2\text{-}36} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda a_i\right)\delta q_i \, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}37)$$

$$\xrightarrow{\text{Euler's Eq.}} \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda a_i = 0} \qquad i = 1, 2 \qquad (6.2\text{-}38)$$

این دو معادله در کنار رابطه قید (6.2-31) باید حل شوند تا $q_1(t), q_2(t), \lambda(t)$ بدست آیند. حال مسأله تغییرات آزاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L^* \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left[L + \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i \dot{q}_i + a_t\right)\right] dt = 0 \qquad (6.2\text{-}39)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) + \delta\bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i \dot{q}_i + a_t\right) + \bar{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{2}(\delta a_i \dot{q}_i + \delta a_t\right]\right\} dt = 0 \qquad (6.2\text{-}40)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d\bar{\lambda}}{dt} a_j + \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \bar{\lambda}\left(\frac{\partial a_t}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial t}\right)\right]\delta q_j + \left(\sum_{i=1}^{2} a_i \dot{q}_i + a_t\right)\delta\bar{\lambda}\right\} dt = 0$$

(6.2-41)

Euler's Eq. $\rightarrow$ $$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{d\bar\lambda}{dt} a_j + \bar\lambda \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right)\dot q_i + \bar\lambda\left(\frac{\partial a_t}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial t}\right) = 0 \qquad (6.2-42) \qquad j=1,2$$

and

$$\sum_{i=1}^{2} a_i \dot q_i + a_t = 0 \qquad (6.2-43)$$

همانطور که دیده می‌شود (6.2-43) همان رابطه قید است ولی (6.2-42) همان رابطه (6.2-39) نیست. فقط در صورتی می‌توانند همان شوند که

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_j} = \frac{\partial a_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial a_t}{\partial q_j} = \frac{\partial a_j}{\partial t} \qquad (6.2-44)$$

و همچنین در نظر بگیریم $\lambda = -\dfrac{d\bar\lambda}{dt}$

ولی اگر چنین شرطی برقرار باشد دیگر قید nonholonomic نیست. پس

نتیجه می‌گیریم که برای سیستم nonholonomic نمی‌توان یک مسأله تغییرات آزاد یافت

در حالت کلی برای مسأله حساب تغییرات زیر داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)\, dt = 0 \qquad (6.2-45)$$

with

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, q_1, \dots, q_n)\dot{q}_j + a_{it}(t, q_1, \dots, q_n) = 0 \qquad i = 1, \dots, m < n \qquad (6.2-46)$$

معادلات دیفرانسیلی خواهد شد.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j + a_{it} = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$a_{i1}\dot{q}_1 + a_{i2}\dot{q}_2 + \cdots a_{in}\dot{q}_n + a_{it} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0} \qquad j = 1, \dots, n \qquad (6.2-47)$$

6.3- Integral Constraints

مسأله تغییرات زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \qquad (6.3\text{-}1)$$

with

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x, y, y')\, dx = l \qquad (6.3\text{-}2)$$

B.C. : $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$

یک تابع ممکن را چنین می‌توان در نظر گرفت

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon\, \eta(x) \qquad (6.3\text{-}3)$$

$$I(\tilde{y}) \equiv \tilde{I}(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\, dx \qquad (6.3\text{-}4)$$

و

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\, dx = l \qquad (6.3\text{-}5)$$

رابطه (6.3-5) از نظر ریاضی نمی تواند درست باشد. زیرا تابع انتگرال رابطه (6.3-2)
را ارضا می کند و لذا نمی تواند در رابطه (6.3-5) صادق باشد. برای حل این مشکل تابع
مکمل $\bar{y}(x)$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \delta y = y(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x) \qquad (6.3-6)$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \phi(x, y+\epsilon_1\eta_1+\epsilon_2\eta_2, y'+\epsilon_1\eta_1'+\epsilon_2\eta_2')\,dx = l \qquad (6.3-7)$$

حال می توان گفت به ازای هر $\epsilon_1 \eta_1(x)$ می توان یک مقدار خاص
$\epsilon_2 \eta_2(x)$ یافت که رابطه (6.3-7) برقرار باشد.