بسم الله الرحمن الرحیم

ضرب

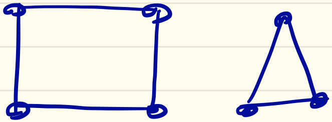
جلسه ۹

المان های لاگرانژی:

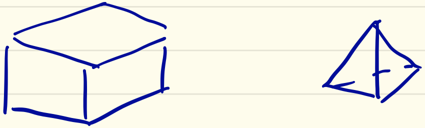
- یک بعدی

Beam, Trust

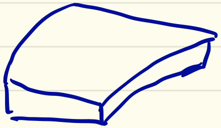
- دو بعدی



- سه بعدی



- Shell



روش حل مشکل تغییر شکل شدید در دیدگاه لاگرانژی:

۱- Rezoning (اصلاح شبکه بندی، Dynamic mesh)

اگر نرم افزار تشخیص داد در قسمتی از جسم تغییر شکلها خیلی زیاد شده است $\left(\frac{J_{min}}{J_{max}} < a\right)$
در آن قسمت المانها را ریزتر کند و برنامه را دوباره شروع می کند.

۲- تعریف معیار گسست اجزای (Erosion)

وقتی کرنش المان به یک مقدار حدی برسد به نرم افزار دستور داده می شود که
المان را به همراه جرم آن حذف کند. اینکه این معیار کرنش ماکزیمم چه مقدار
باشد بستگی به ماده و نرخ کرنش و غیره می باشد.

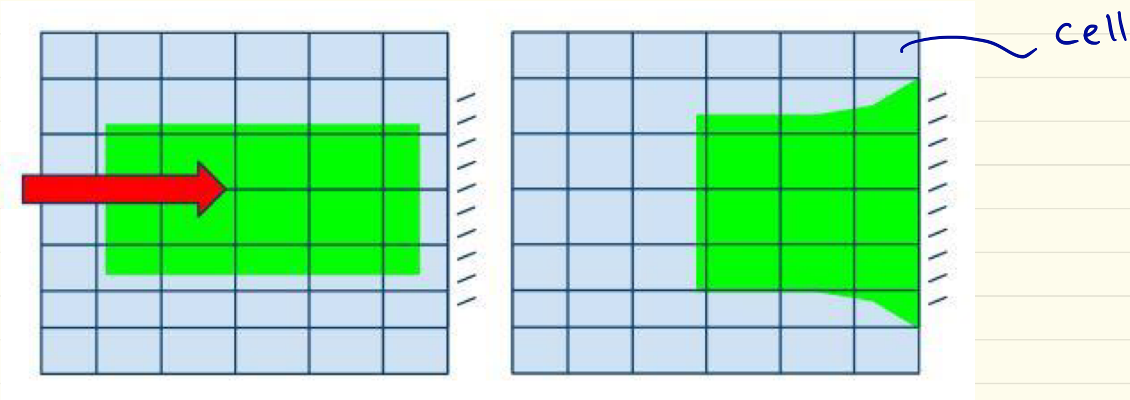
2.3.2 - المان محدود با دیدگاه اویلری

این دیدگاه در مقابل دیدگاه لاگرانژی قرار دارد.

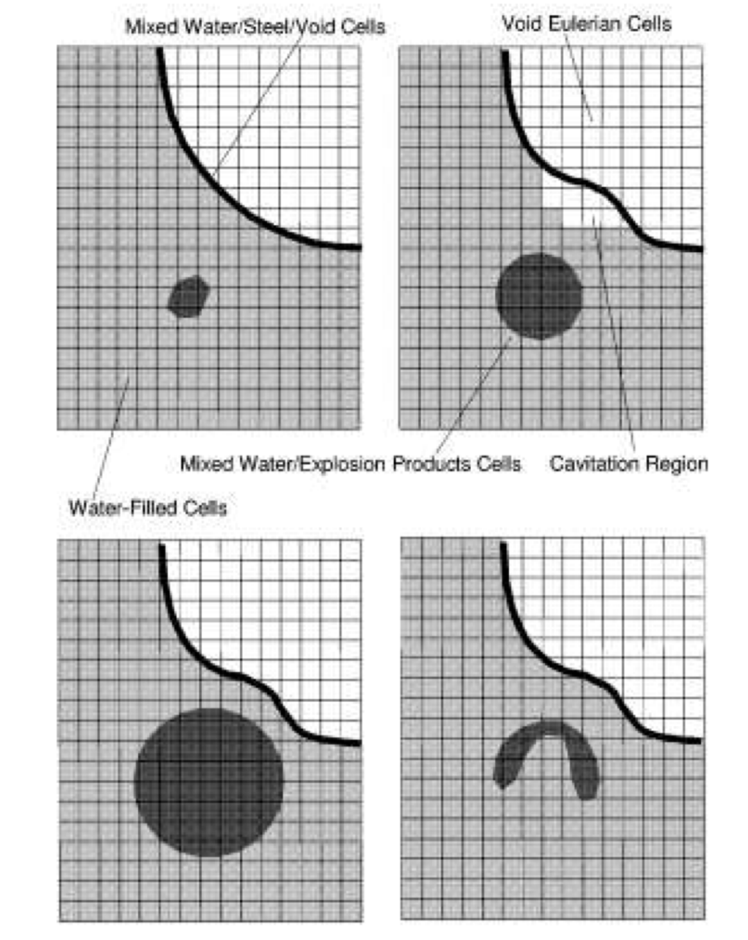
در این روش ناظر ساکن است و ماده از مقابل آن عبور می‌کند. لذا شبکه‌بندی در فضا ثابت می‌ماند و ماده در میان شبکه اجازه عبور دارد. به همین خاطر می‌تواند تغییر شکل‌های بزرگ را به راحتی مدل کند و از دیدگاه اویلری برای شبیه‌سازی حرکت ماده به خصوص سیالات به وفور استفاده می‌شود.

در این روش معادلات بقای جرم، تکانه و انرژی در مرزهای سلول ارضا می‌شود. درجات آزادی خروجی این روش: سرعت، ف، رو، دما هستند و جابجایی‌ها از انتگرال‌گیری سرعت بدست می‌آیند.

در این روش پیش‌بینی مرزهای ماده دچار ضعف است. برای اجرای این روش حافظه و زمان محاسبات بیشتری مورد نیاز است. همچنین شبیه‌سازی فرآیندهای غیر پایدار در دیدگاه اویلری آسان نیست.



در این دیدگاه معادلات بصورت انتگرالی مورد استفاده قرار می گیرند. به همین خاطر یک رفتار انتگرالی
و کلی از رفتار ماده بدست می آورد (average از کمیتها می دهد)

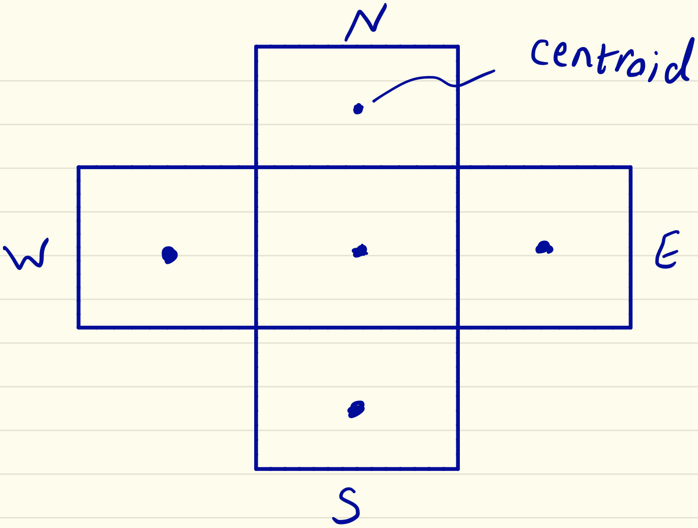

Mixed Water/Steel/Void Cells
Void Eulerian Cells
Mixed Water/Explosion Products Cells
Cavitation Region
Water-Filled Cells

FVM - 2_3_3

: CFD

در این دیدگاه، گره در گوشه ها نداریم.

در این روش با انتگرال گیری معادلات تعادل بر روی سلول ها مثلاً حرارت، شار سیال، اندازه حرکت نوشته می شود.



معادلات حاکم بر توده سیال Navier-Stokes (غیرخطی) می باشد که با قضیه دیورژانس تبدیل به انتگرال روی سطح می شود.

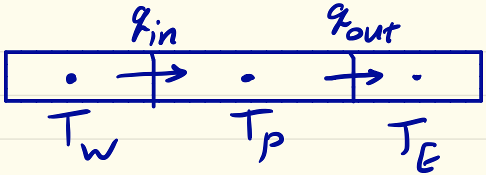
مثلاً معادله حرارت یک بعدی:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$$

دیورژانس

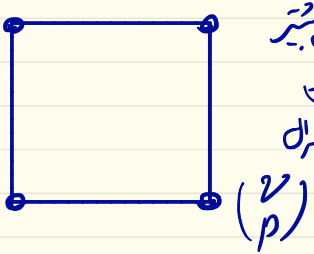
$$k\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

روی مرزها



$$\sum q = 0 \longrightarrow k\frac{T_E - T_p}{\delta x} - k\frac{T_p - T_W}{\delta x} = 0$$

اگر از FEM برای حل سیال بخواهیم استفاده کنیم باید درجای آزادی گره‌ها را سرعت و فشار در نظر بگیریم.



می برد ولی زمان بیشتر

و از معادلات PDE مستقیم استفاده می کنیم که جواب دقیق‌تری است چون تقریب انتگرال نداریم

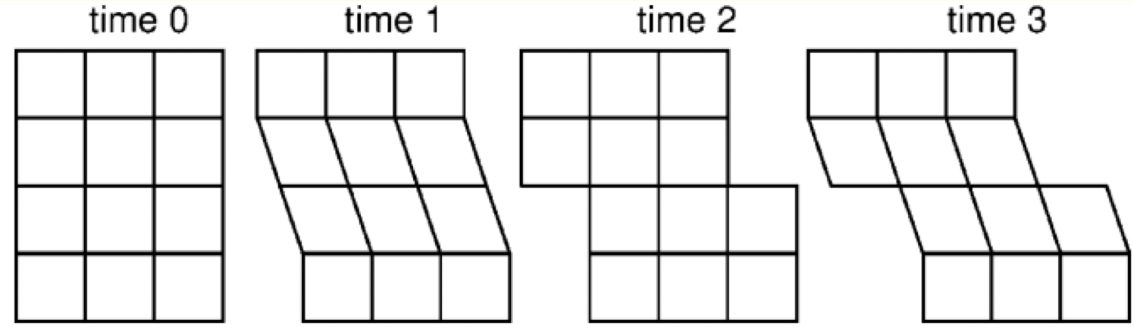
چون PDE برحسب V و P است پس درجای آزادی را سرعت و فشار می گیرند.

اگر سیال تراکم پذیر باشد چون ρ نیز متغیر می‌شود احتیاج به معادله اضافی برای حل معادلات است. برای این منظور احتیاج به معادلات فضای حالت هست:

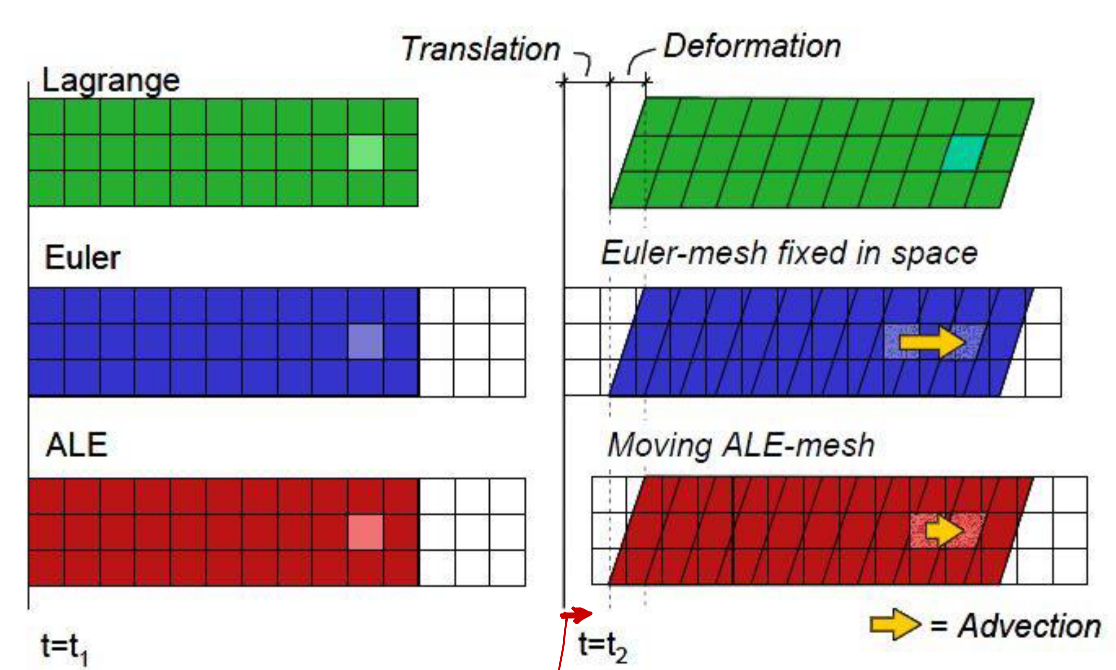
EOS : Equation of State

۲-۳-۴ - المان محدود با دیدگاه ALE

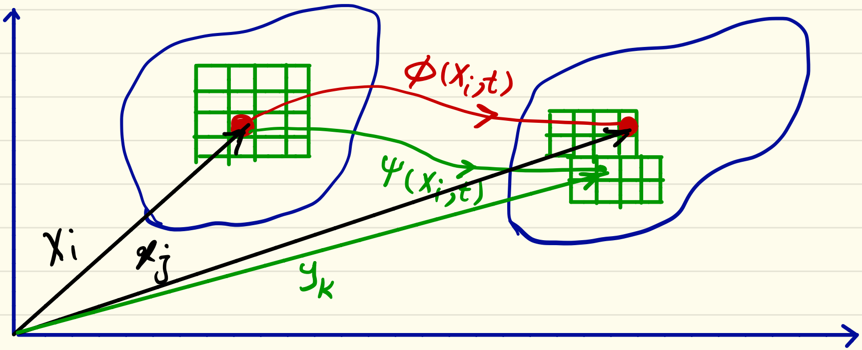
در این روش المان ها در فضا نه ثابت هستند (دیدگاه اویلری) و نه متصل به جسم یا ماده (دیدگاه لاگرانژی) بلکه دارای حرکت دلخواه و مستقل از حرکت ماده است. به این طریق ضعف های هر یک از این دو دیدگاه پوشش داده می شود و در حالتهای خاص می توان به هر یک از دو دیدگاه لاگرانژی و یا اویلری رسید. ALE ابزار قدرتمند برای مدلسازی تغییر شکلهای موضعی بزرگ و نیز جریان های غیر مقید از ماده روی مرزها می باشد اما جواب درست گرفتن از این دیدگاه کمی دقت می خواهد.



حرکت مش بصورت مستقل از حرکت ماده در روش ALE



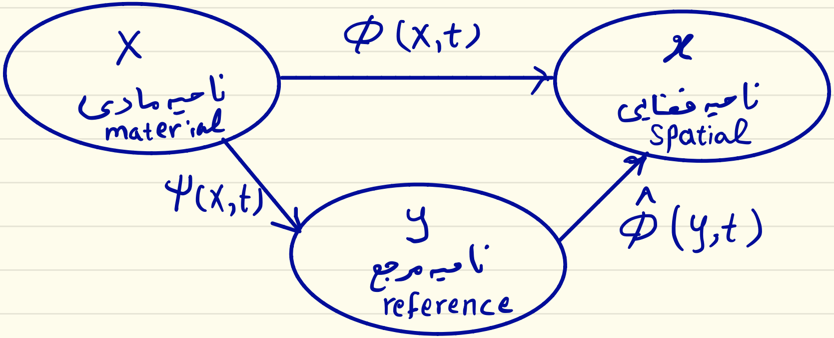
جابجائی مش بصورت
مستقل از حرکت مادی



$$x_j = \phi_j(X_i, t)$$

$$y_k = \psi_k(X_i, t)$$

$$x_j = \hat{\phi}_j(y_k, t)$$



می دانیم هر کمیت فیزیکی مانند f را می توان برحسب مختصات لاگرانژی یا اولیه نوشت $\left(F(X_j,t)\right)$ یا برحسب مختصات کنونی یا جاری نوشت $\left(f(x_j,t)\right)$. همچنین ناحیه و فضای مش هم تاریخچه تمام کمیت‌ها را در حافظه دارد پس می توان کمیت‌های فیزیکی را چنین نیز نوشت $f(y_j,t)$.

اگر دیدگاه اویلری داشته باشیم و کمیت‌ها را برحسب مختصات جاری بنویسیم مشتق گیری برحسب زمان چنین خواهد بود

$$\frac{D f_i(x_j,t)}{Dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \overset{\circ}{f_i}(x_j,t) \qquad (a)$$

اما اگر ناظر (مرجع) بر روی مش بندی فیکس شده باشد می توان چنین تعریف کرد

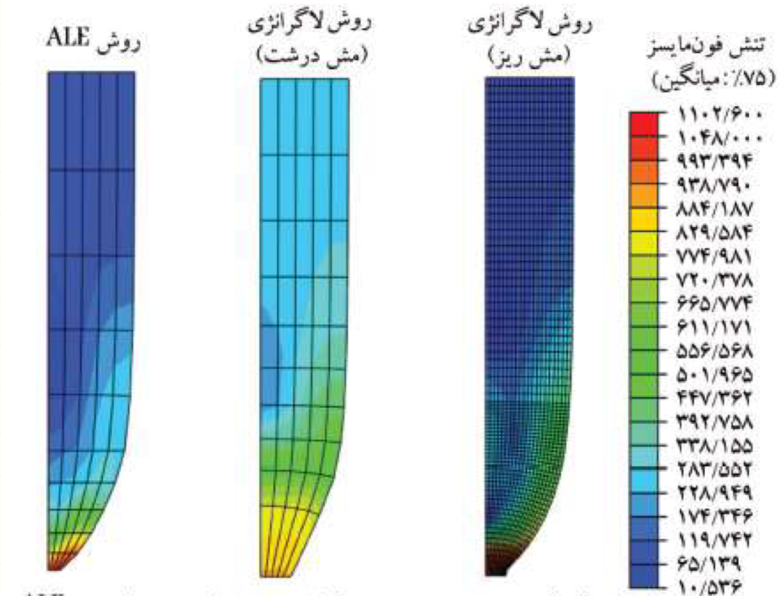
$$f' = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (b)$$

در این صورت تغییرات برحسب زمان برای کمیت f برای ناظر روی مش چنین خواهد بود

$$\overset{\circ}{f_i} = f_i' + (v_j - \hat{v}_j)\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (c)$$

$\hat{v}_j$: سرعت حرکت مش.

دیده می‌شود که اگر سرعت مش و ماده برابر باشد ($v_j = \hat{v}_j$) آنگاه ماده و شبکه مش به یکدیگر متصل اند و دیدگاه لاگرانژی شکل می‌گیرد. اما اگر سرعت حرکت مش صفر باشد ($\hat{v}_j = 0$) آنگاه توصیف اویلری پدید می‌آید. اما اگر $v_j \neq \hat{v}_j \neq 0$ آنگاه توصیف ALE خواهیم داشت.



الف) مش ریز؛ ب) (مش درشت)؛ ج) روش ALE

مثال: کشش یک میله و مشاهده مسأله گلوئی شدن میله.

(Soft/smoothed Particle Hydrodynamics) SPH - 2-3-5

این روش اولین بار سال ۱۹۷۷ برای حل مسائل ستاره‌شناسی در فضای سه‌بعدی استفاده شد. درحال حاضر در مسائلی مانند ترک خوردگی، شکل دهی فلزات، دینامیک سیالات، انفجار و انفجار زیر آب کاربرد دارد.

در این روش ماده به صورت ذرات در نظر گرفته می‌شود که هر ذره با تابعی فقط تحت تاثیر ذرات اطراف خود را با یک شعاع تاثیرگذاری می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار عددی تابع در هر کره (ذره) به صورت میانگین وزنی از مقادیر عددی تابع در کره‌های مجاور بیان می‌شود (همچنین برای مقادیر مشتق تابع در هر کره).

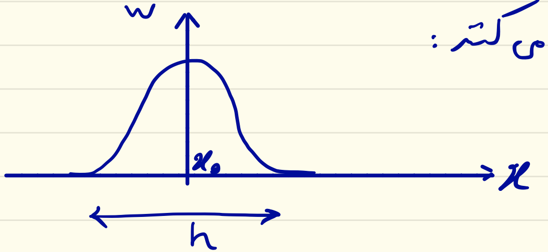
این روش ابزار مناسب برای مدلسازی هندسه‌های پیچیده و تغییر شکل‌های بزرگ است. چون مش‌بندی صورت نمی‌گیرد سرعت اجرای این روش بالاست.

اول با لاگرانژی مش می‌زند و بعد در مرکز هر المان یک ذره قرار می‌دهد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\underset{\text{تابع دیراک}}{\delta(x_0-x)}\,dx = f(x_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_0-x)\,dx}_{\text{طبق تعریف مساوی ۱ است}} = f(x_0) \qquad (a)$$

تابع دیراک در $x=x_0$ یک است و در سایر نقاط صفر. این تابع را کمی smooth تری کنند و توابع اینچنینی
تعریف می کنند:

$$\int_{\Omega} w(x_0-x,h)\,dx = 1$$



h: شعاع محدوده تاثیرگذاری تابع وزن w

$$\langle f(x_0)\rangle = \int_{\Omega} f(x)\,w(x_0-x,h)\,dx \approx f(x_0) \qquad (b)$$

w: تابع هموارکننده کرنل Kernel function (Smoothing func)

$\langle f(x)\rangle$: Kernel approximation of $f(x)$

خواص تابع هموارکننده:

۱- همواره مثبت است $\quad w>0$

۲- در خارج از محدوده هموار سازی همواره صفر است $|x-x_0|>h$ when $w(x-x_0,h)=0$

۳- شرط یکه بودن $\quad \int_{\Omega} w(x_0-x,h)\,dx=1$

۴- $\lim_{h\to 0} w(x-x_0,h)=\delta(x-x_0)$

۵- باید دارای مشتقات پیوسته باشد

حال رابطه (b) را گسسته سازی می‌کنیم:

$$\boxed{\langle f(x_0)\rangle=\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\, w(x_0-x_j)\, \Delta V_j} \qquad (c)$$

یک بعدی x_0-x_j می‌شود

بطور مثال اگر در نظر بگیریم:

$$R=\frac{|x_0-x|}{h} \qquad (d)$$

یکی از توابعی که تعریف می‌کنند چنین است:

$$w(x_0 - x, h) = W(R,h) = \begin{cases} \alpha_d (1+3R)(1-R)^3 & 0 \leq R < 1 \\ 0 & 1 \leq R \end{cases} \qquad (e)$$

$$\alpha_d = \begin{cases} \frac{5}{4h} & \text{for } 1D \\ 5/\pi h^2 & \text{for } 2D \\ 105/16\pi h^3 & \text{for } 3D \end{cases} \qquad (f)$$

با کمی عملیات ریاضی (g)

$$\langle \nabla \cdot f(x_0) \rangle = -\int_\Omega f(x) \cdot \nabla W(x_0 - x, h)\, dx$$

یا

$$\boxed{\langle \nabla \cdot f(x_0) \rangle = -\sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cdot \nabla W(x_0 - x_j, h)\, \Delta V_j} \qquad (h)$$