بسم الله الرحمن الرحیم — انرژی — جلسه ۶

$$I(\tilde{y}) = \int_{x_1}^{x_2+\Delta x_2} F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx \qquad (4.2-2)$$

$$\delta^{(T)} = I(\tilde{y}) - I(y) = \int_{x_1}^{x_2+\Delta x_2} F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (4.2-3)$$

$$\Rightarrow \delta^{(T)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(x,\tilde{y},\tilde{y}') - F(x,y,y')\right]dx + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) + \dots\right]dx + \tilde{F}\Big|_{x_2+\theta\Delta x_2} \cdot \Delta x_2 \qquad (4.2-4)$$

براساس قضیه مقدار متوسط با $0\le\theta\le 1$ که رابطه فوق نوشته شده است.

$$F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\Big|_{x_2+\theta\Delta x_2}\cdot\Delta x_2=\left[F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\Big|_{x_2}+\frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial x}\Big|_{x_2}\cdot\theta\Delta x_2+\dots\right]\Delta x_2$$

$$\simeq F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\Big|_{x=x_2}\cdot\Delta x_2+\cdots$$

$$=\left[F(x,y,y')+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots\right]\Big|_{x_2}\cdot\Delta x_2$$

$$\simeq F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}\cdot\Delta x_2+\cdots \qquad (4.2-5)$$

$$\xrightarrow[4.2-5]{4.2-4}\ \delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx+F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}\cdot\Delta x_2$$

حال با انتگرال گیری جزء به جزء و با فرض $\delta y\big|_{x=x_1}=0$ داریم:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2} \cdot \delta y \Big|_{x=x_2} + F(x,y,y')\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2$$

(4.2-7)

حال برای اکسترمال شدن فانکشنال فوق باید $\delta I = 0$ و چون رابطه فوق برای تمام مقادیر ازجمله

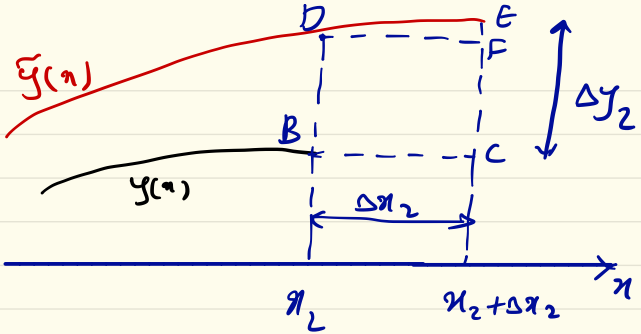
$\delta y|_{x_2} = \Delta x_2 = 0$ صادق است پس

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (4.2\text{-}8)$$

که معادله اویلر است. از طرفی برای عبارت مرزی، حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} \cdot \delta y \Big|_{x_2} + F\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = 0 \qquad (4.2\text{-}9)$$

با توجه به شکل می‌توان گفت



$$\delta y\Big|_{x=x_2} = BD = CE - EF \simeq \Delta y_2 - \frac{d\tilde{y}}{dx}\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2$$

$$= \Delta y_2 - \left[\frac{dy}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dx}\right]\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2 \qquad (4.2\text{-}10)$$

بنابرفرض weak variation داریم:

$$\delta y\Big|_{x=x_2} \simeq \Delta y_2 - \frac{dy}{dx}\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = \Delta y_2 - y'\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2 \qquad (4.2\text{-}11)$$

$$\xrightarrow[4.2\text{-}11]{4.2\text{-}9} \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - y'\right) + F\right]\Big|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} \cdot \Delta y_2 + \left.\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\right|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = 0} \qquad (4.2\text{-}12)$$

درحالت خاص اگر بخواهیم به حالت قبل یعنی $\Delta x_2 = 0$ برسیم آنگاه داریم:

$$\xrightarrow{4.2\text{-}11} \quad \left.\delta y\right|_{x_2} = \Delta y_2 \qquad (4.2\text{-}13)$$

$$\xrightarrow{4.2\text{-}12} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} \cdot \left.\delta y\right|_{x_2} = 0 \qquad (4.2\text{-}14)$$

که همان شرایط مرزی اساسی و طبیعی را به ما می‌دهد.

اگر x_1 هم نقطه متحرکی باشد داریم:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} \cdot \Delta y_1 + \left.\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\right|_{x_1} \cdot \Delta x_1 = 0 \qquad (4.2\text{-}15)$$

همین نتیجه را با روش ϵ نیز می‌توان یافت:

$$\tilde{y} = y + \epsilon \eta \qquad (4.2\text{-}16)$$

با انتخاب ϵ های مختلف $\tilde{y}$ های مختلف بدست خواهد آمد که هر یک $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_1$ هایی خواهند داشت که مختص آنها باشند. پس $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$ هم به گونه‌ای وابسته به ϵ هستند. لذا می‌توان چنین نشان داد:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \alpha_1 \epsilon + \alpha_2 \epsilon^2 + \cdots \\ \tilde{x}_2 = x_2 + \beta_1 \epsilon + \beta_2 \epsilon^2 + \cdots \end{cases} \qquad (4.2\text{-}17a)$$

α_i , β_i اعداد دلخواهی هستند. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - x_1 = \alpha_1 \epsilon + \alpha_2 \epsilon^2 + \cdots \\ \tilde{x}_2 - x_2 = \beta_1 \epsilon + \beta_2 \epsilon^2 + \cdots \end{cases} \qquad (4.2\text{-}17b)$$

$$\rightarrow \begin{cases} d^{(T)} x_1 = d^{(1)} x_1 + d^{(2)} x_1 + \cdots \\ d^{(T)} x_2 = d^{(1)} x_2 + d^{(2)} x_2 + \cdots \end{cases} \qquad (4.2\text{-}18)$$

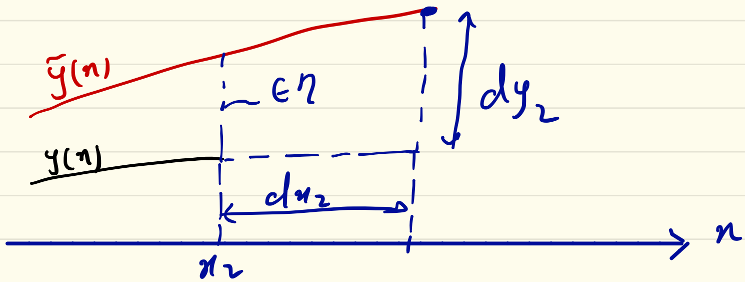
که در آن ها

$$\begin{cases} d^{(T)}x_1 = \tilde{x}_1 - x_1 , \; d^{(1)}x_1 = \alpha_1 \epsilon , \; d^{(2)}x_1 = \alpha_2 \epsilon^2 \ldots \\ d^{(T)}x_2 = \tilde{x}_2 - x_2 , \; d^{(1)}x_2 = \beta_1 \epsilon , \; d^{(2)}x_2 = \beta_2 \epsilon^2 \ldots \end{cases} \qquad (4.2-19)$$

$$\xrightarrow[4.2-19]{4.2-17} \quad d^{(1)}x_1 = \epsilon \left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} , \quad d^{(1)}x_2 = \epsilon \left(\frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \qquad (4.2-20)$$

اگر در نظر بگیریم: $dx_1 \equiv d^{(1)}x_1$, $dx_2 \equiv d^{(1)}x_2$ پس:

$$dx_1 = \epsilon \left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} , \quad dx_2 = \epsilon \left(\frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \qquad (4.2-21)$$



با توجه به شکل

$$\epsilon\eta(x_2) = dy_2 - \frac{d\tilde{y}}{dx}\Big|_{x_2} . dx_2 \simeq dy_2 - \frac{dy}{dx}\Big|_{x_2} . dx_2 = dy_2 - y'\Big|_{x_2} dx_2 \qquad (4.2-22)$$

به طریق مشابه

$$\epsilon\eta(x_1) \simeq dy_1 - y'\Big|_{x_1} dx_1 \qquad (4.2-23)$$

حال به مساله اصلی بازمی گردیم:

$$\tilde{I}(\epsilon) = J(\tilde{y}) = \int_{\tilde{x}_1(\epsilon)}^{\tilde{x}_2(\epsilon)} F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\,dx \qquad (4.2-24)$$

می دانیم:

$$\delta^{(1)} I = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} = 0 \qquad (4.2-25)$$

براساس قانون Libnitz داریم:

$$\epsilon\left[\int_{\tilde{x}_1(\epsilon)}^{\tilde{x}_2(\epsilon)} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}\,dx + F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\Big|_{x_2} \cdot \frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon} - F(x,\tilde{y},\tilde{y}')\Big|_{x_1} \cdot \frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} = 0 \qquad (4.2-26)$$

$$\Rightarrow \epsilon\left[\int_{\tilde{x}_1(\epsilon)}^{\tilde{x}_2(\epsilon)} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon}\right)dx\right]\Bigg|_{\epsilon=0} + F(x,y,y')\Big|_{x_2}\epsilon\left(\frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon}\right)\Bigg|_{\epsilon=0}$$

$$- F(x,y,y')\Big|_{x_1}\epsilon\left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon}\right)\Bigg|_{\epsilon=0} \qquad (4.2-27)$$

$$\xrightarrow{4.2-21} \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx + F(x,y,y')\Big|_{x_2}dx_2 - F(x,y,y')\Big|_{x_1}dx_1 = 0 \qquad (4.2-28)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\epsilon\eta\, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\epsilon\eta\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \left[F dx\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad (4.2-29)$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\epsilon\eta\, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}dy + \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad (4.2-30)$$

در حالت کلی

$$I(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)\,dx \qquad (4.2-31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i}=0 \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (4.2-32)$$

and

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y'_i}\Delta y_i+\left(F-\sum_{i=1}^{n}y'_i\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right)\Delta x_i\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}=0$$

گاهی چنین قرارداد می‌کنند که:

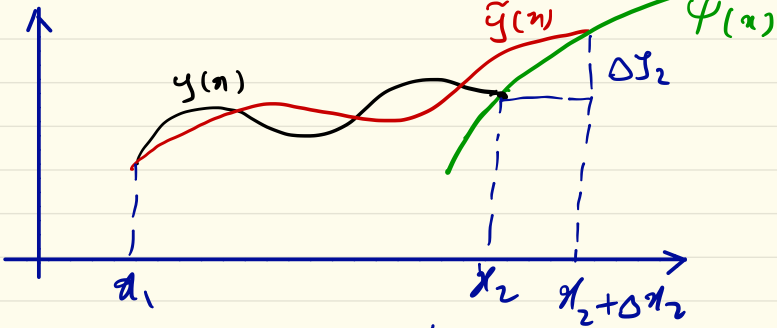
$$\Delta y_i\Big|_{x=x_j}\equiv\Delta y_{ij}\ ,\qquad \Delta x\Big|_{x=x_j}\equiv\Delta x_j$$

4.3- Variable (movable) Boundary Point Lying on a curve

بار دیگر ساده‌ترین حالت مسأله حساب تغییرات را در نظر بگیرید:

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (4.3-1)$$

(x_1,y_1) فیکس است و (x_2,y_2) را متغیر بر روی منحنی $\varphi(x)$ در نظر می‌گیریم.



برای پیدا کردن تابع اکسترمال این فانکشنال باید معادله اویلر زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (4.3-2)$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل درجه 2 است. پس 2 تا ثابت انتگرال دارد.

از طرفی نقطه x_2 نیز مجهول است. پس احتیاج به سه معادله برای یافتن تابع

اکسترمال است.

$$\text{B.C.} \longrightarrow \begin{cases} y(x_1) = y_1 & (\mathrm{I}) \qquad (4.3\text{-}3) \\[2ex] \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_2} \cdot \Delta y_2 + \left.\left\{F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right\}\right|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = 0 & (4.3\text{-}4) \end{cases}$$

از روی شکل مقابل می‌توان دید:

$$\Delta y_2 \simeq \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x_2} \cdot \Delta x_2 \qquad (4.3\text{-}5)$$

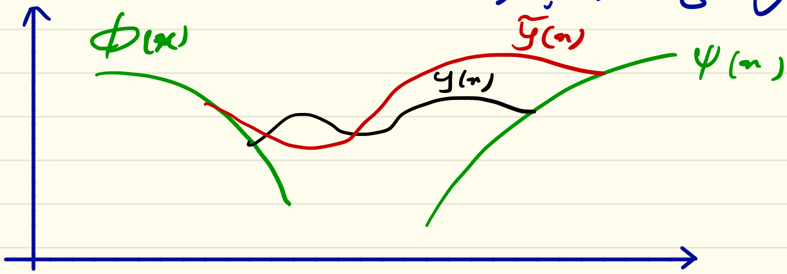
$$\longrightarrow \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\psi' + F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\right|_{x_2} \cdot \Delta x_2 = 0 \qquad (4.3\text{-}6)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\psi' - y') + F\right]\right|_{x_2} = 0} \qquad (\mathrm{II}) \qquad (4.3\text{-}7)$$

و سومین رابطه نیز چنین است:

$$y(x_2) = \psi(x_2) \qquad (\mathrm{III})$$

اگر x_1 نیز متغیر بر روی منحنی $\phi(x)$ باشد:



$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\phi' - y') + F\right]\Big|_{x_1} = 0 \qquad (41.3\text{-}8)$$

برای این نوع شرایط مرزی، شرایط transversality condition می‌گویند.