بسم الله الرحمن الرحیم　　　روش های انرژی　　　جلسه ۵

@energymetods

مثال ۲: مسأله پاندول فضائی را دوباره درنظر بگیرید

$$I=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\int_{t_1}^{t_2} L(t,\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi})\,dt \qquad (3.3\text{-}11)$$

$$L=\frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)-mga\cos\theta \qquad (3.3\text{-}12)$$

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)-mga\cos\theta\right]dt \qquad (3.3\text{-}13)$$

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}ma^2(2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+2\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}\sin^2\theta+\dot{\phi}^2\,2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta\right.$$
$$\left.+mga\sin\theta\,\delta\theta\right]dt=0$$
$$(3.3\text{-}14)$$

3.4_ Functionals Involving more than one Independent Variables

یک مثال وریشنال را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$I(u) = \int_0^b \int_0^a F(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})\, dx\, dy \qquad (3.4\text{-}1)$$

$$\left(u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

که روی مستطیل a×b تعریف شده است.

$$\delta I = \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\delta u_{,x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\delta u_{,y} \right) dx\, dy$$

$$= \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (3.4\text{-}2)$$

$$\Rightarrow \delta I=\int_0^b\int_0^a\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right]\delta u\,dx\,dy+\int_0^b\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\delta u\right]\Big|_{x=0}^{x=a}dy$$

$$+\int_0^a\left[\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\delta u\right]\Big|_{y=0}^{y=b}dx \qquad (3.4-3)$$

رابطه فوق یک حقیقت است و همواره برقرارات مستقل از اینکه δu چه مقداری باشد (به ازای تمام مقادیر δu). پس به ازای مقادیری از δu که در مرزها صفر می شود نیز برقرارات.

به عبارت دیگر چون δu هر مقدار دلخواهی می تواند باشد و می تواند هر مقداری روی مرزها داشته باشد پس ۵ جمله عبارت فوق مستقل خطی هستند (هیچ وابستگی نسبت به هم ندارند) لذا هر یک از جملات باید صفر باشند.

$$\int_0^b\int_0^a\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right]\delta u\,dx\,dy=0$$

به ازای تمام مقادیر δu

(3.4-4)

لذا طبق قضیه اساسی حساب تغییرات می توان نتیجه گرفت

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}} = 0} \qquad (3.4-6)$$

پس در نتیجه عبارت مرزی نیز باید صفر شود:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\delta u\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\delta u\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} dx = 0 \qquad (3.4-7)$$

بار دیگر چون این رابطه برای تمام مقادیر δu در مرزها صادق است پس برای مقادیر δu که در $y=0$ صفر است نیز باید صادق باشد. با می توان گفت این دو جمله مستقل خطی هستند پس:

$$\int_0^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\Bigg|_{x=a} \cdot \delta u(a,y)\right] dy - \int_0^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\Bigg|_{x=0} \delta u(0,y)\right] dy = 0$$

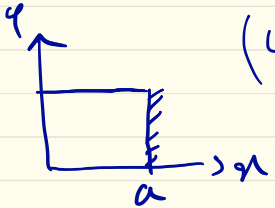
(3.4-8)

با زهم گوییم چون این عبارت برای تمام مقادیر δu در دو مرز $x=0,a$ برقرار است پس برای $\delta u(0,y)=0$ هم باید برقرار باشد.

$$\int_0^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \Big|_{x=a} \cdot \delta u(a,y) \right] dy = 0 \qquad (3.4\text{-}9)$$

$$\Rightarrow \quad \text{either} \quad \delta u(a,y) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \Big|_{x=a} = 0 \qquad (3.4\text{-}10)$$

$$\left(u(a,y) = f(y) \right)$$



با این اوصاف از رابطه (3.4-8) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\text{either} \quad \delta u(0,y) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \Big|_{x=0} = 0 \qquad (3.4\text{-}11)$$

یعنی به طور کلی می‌توان گفت:

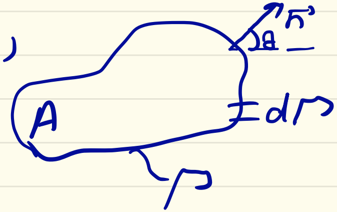
$$\text{either} \quad \underbrace{\delta u = 0}_{\text{E.B.C}} \quad \text{or} \quad \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0}_{\text{N.B.C}} \quad \text{at } x = 0, a$$

and $\qquad (3.4\text{-}12)$

$$\text{either} \quad \delta u = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} = 0 \quad \text{at } y = 0, b$$

حال اگر مسأله چنین تعریف شده باشد چه باید کرد؟

$$I = \iint_A F(x, y, u, u_{,x}, u_{,y})\, dA \qquad (3.4\text{-}13)$$



$$\delta I = \iint_A \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u_{,x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} \delta u_{,y} \right) dA \qquad (3.4\text{-}14)$$

طبق تعریف گرادیان می دانیم:

$$\vec{\nabla} \delta u = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \vec{j} = \delta u_{,x} \vec{i} + \delta u_{,y} \vec{j} \qquad (3.4\text{-}15)$$

حال تعریف می کنیم

$$\vec{V} = \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} \vec{j} \qquad (3.4\text{-}16)$$

$$\vec{\nabla} \delta u \cdot \vec{V} = \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u_{,x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}} \delta u_{,y} \qquad (3.4\text{-}17)$$

از طرفی در جبر تانسوری دیدیم که:

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{V}) - \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad (3.4\text{-}18)$$

در

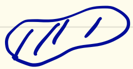
$$\vec{\nabla}\delta u\cdot\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot(\delta u\,\vec{V}) - \delta u\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad (3.4\text{-}19)$$

با استفاده از (3.4-17) و (3.4-19) رابطه (3.4-14) چنین بازنویسی می‌شود:

$$\delta I = \iint_A \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \vec{\nabla}\delta u\cdot\vec{V}\right) dA = \iint_A \left\{\frac{\partial F}{\partial u} - \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right\}\delta u\, dA + \iint_A \vec{\nabla}\cdot(\delta u\,\vec{V})\, dA \qquad (3.4\text{-}20)$$

براساس قضیه دیورژانس دوبعدی داریم:

$$\iint_A \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dA = \oint_s \vec{n}\cdot\vec{B}\, ds \qquad (3.4\text{-}21)$$



$$\delta I = \iint_A \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\right)\delta u\, dA + \oint_s \vec{n}\cdot\vec{V}\,\delta u\, ds \qquad (3.4\text{-}22)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}} = 0 \qquad (3.4\text{-}23)$$

either $\delta u = 0$ or $\vec{n}\cdot\vec{v} = n_1 \dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} + n_2 \dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} = 0$ on Γ

$$(3.4\text{-}24)$$

$n_1 = \cos\theta$, $n_2 = \sin\theta$

Chapter IV Functionals with variable Boundary Points

4.1- Introduction

4.2- Functionals with variable Boundary Points

ساده‌ترین حالت مسأله حساب تغییرات را درنظر بگیرید:

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (4.2\text{-}1)$$

درنظر بگیرید که x_1 فیکس شده است ولی x_2 متحرک است (آنفیکس شده است)