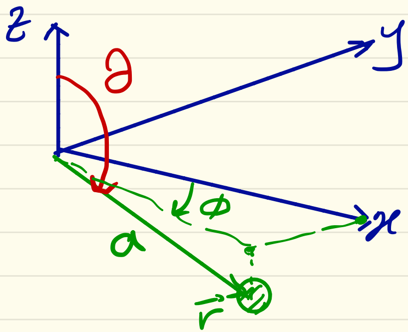
بسم الله الرحمن الرحیم　　　　انرژی　　　　جلسه ۴

مثال: پاندول فضائی



$$\vec{r} = a\cos(\theta - \tfrac{\pi}{2})\cos\phi\,\hat{i} - a\cos(\theta - \tfrac{\pi}{2})\sin\phi\,\hat{j} - a\sin(\theta - \tfrac{\pi}{2})\,\hat{k} \qquad (2.6\text{-}16)$$

$$\dot{\vec{r}} = (a\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - a\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)\,\hat{i} + (-a\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi - a\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)\,\hat{j} - a\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k} \qquad (2.6\text{-}17)$$

Kinetic Energy

$$T = \tfrac{1}{2} m\,\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \tfrac{1}{2} m a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) \qquad (2.6\text{-}18a)$$

Gravitational Potential Energy $V = -mga\sin(\theta - \pi/2) = mga\cos\theta$ (2.6-18b)

تعریف می کنیم

$L = T - V$ Lagrangian (function) (2.6-19)

$$\rightarrow L = \tfrac{1}{2} m a^2 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) - mga\cos\theta \quad (2.6\text{-}20)$$

طبق اصل همیلتون معادله با نزول یا استیشنری کردن فانکشنال زیر بدست می آید

$$I(\theta, \phi) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi)\, dt \quad (2.6\text{-}21)$$

طبق معادلات اویلر داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 0 \quad (2.6\text{-}22a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = 0 \quad (2.6\text{-}22b)$$

$$
\begin{cases}
ma^2\ddot{\theta} - ma^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\left(ma^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0
\end{cases}
\tag{2.6-23}
$$

Chapter III – The δ-operator Method

3.1– Introduction

3.2– The δ-operator method

دیریکله

$$
\delta^{(T)} I = \tilde{I}(\epsilon) - I = I(\tilde{y}, \tilde{y}') - I(y, y') \tag{3.2-1a}
$$

$$
\delta^{(1)} I = \epsilon \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} \tag{3.2-1b}
$$

$$
\delta^{(2)} I = \frac{1}{2}\epsilon^2 \left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\right)\bigg|_{\epsilon=0} \tag{3.2-1c}
$$

برای فانکشنال F نیز بطور مشابه می‌توان تعریف کرد:

$$\delta^{(T)}F = F(x,\tilde{y},\tilde{y}') - F(x,y,y') \qquad (3.2\text{-}2a)$$

$$\boxed{\delta^{(1)}F = \epsilon\left(\frac{dF(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0}} = \epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\cdot\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0}$$

$$= \epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) \qquad (3.2\text{-}2b)$$

$$\delta^{(2)} = \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{d^2F}{d\epsilon^2}\right)\Big|_{\epsilon=0} = \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2\right) \qquad (3.2\text{-}2c)$$

به طریق مشابه:

$$\delta^{(T)}F = \delta^{(1)}F + \delta^{(2)}F + \dots \qquad (3.2\text{-}3)$$

با توجه به روابط (2.3-13) و (2.3-16) و (2.3-17) و همچنین در (3.2-2) و (3.2-3)

می‌توان نوشت:

$$\delta^{(T)} I = \delta^{(1)} I + \delta^{(2)} I + \cdots = \int_{x_1}^{x_2} \delta^{(T)} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta^{(1)} F\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta^{(2)} F\,dx + \cdots$$

(3.2-5)

به عبارت دیگر

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \delta^{(1)} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\epsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\epsilon\eta')\right] dx$$

(3.2-6)

از این به بعد ما $(\delta^{(1)} I)$ را First Variation نامیده و با δI نمایش

می‌دهیم و به آن variation ناکامل I می‌گوییم.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\epsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\epsilon\eta')\right] dx$$

(3.2-7)

پس دیدیم که:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}(\epsilon \eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\epsilon \eta') \qquad (3.2-8)$$

حال اگر $F \equiv y$ در نظر بگیریم:

$$\delta y = \epsilon \eta \qquad (3.2-9)$$

یا دیگر اگر $F \equiv y'$ در نظر بگیریم:

$$\delta y' = \epsilon \eta' \qquad (3.2-10)$$

بنابراین

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \qquad (3.2-11)$$

حال از طرفین رابطه (3.2-9) مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \epsilon \eta' \qquad (3.2-12)$$

$$\xrightarrow{(3.2-10)} \frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (3.2-13)$$

این نشان می‌دهد که اپراتورهای δ و $\frac{d}{dx}$ خاصیت جابجائی دارند.

مشتق گیری زنجیره‌ای چنین اثبات شده است:

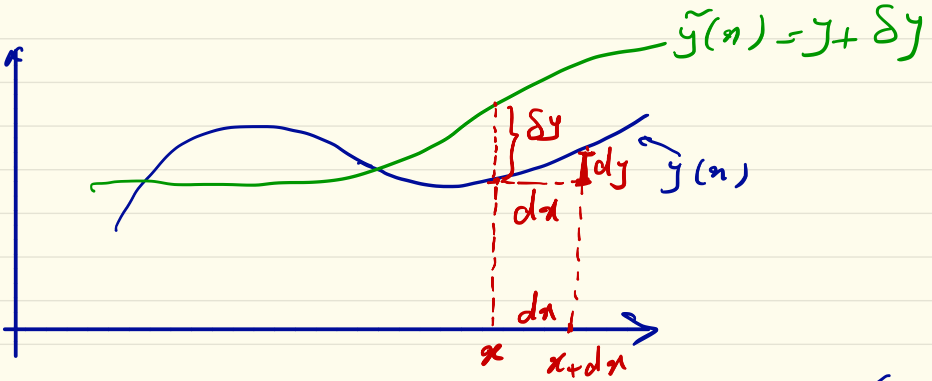
$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' \qquad (3.2\text{-}14)$$

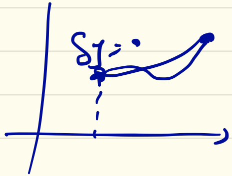
بطریق مشابه با توجه به (3.2-11) می‌توان گفت

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\delta x}_{0} + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \qquad (3.2\text{-}15)$$

$y = x^2 + \sin x \quad , \quad \delta y = \ldots$

$\delta(x^2 + \sin x) = 0$





dy : تغییرات y بر روی یک منحنی به ازای تغییرات x است

δy : تغییرات y در یک x ثابت از یک منحنی تا منحنی دیگر است (خطا در محاسبه y با تقریب $\tilde{y}$)

بازگردیم به مسئله اصلی مطرح شده:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \qquad (3.2-16)$$

گفتیم:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx \qquad (3.2-17)$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \qquad (3.2-18)$$

اما قبلاً نشان دادیم که اگر y تابع اکسترمال این فانکشنال باشد باید

$$\delta I = 0$$

$$\tilde{I}(\epsilon) - I \geq 0 \rightarrow \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} \geq 0 \rightarrow \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} = 0 \rightarrow \delta I = 0$$

پس از رابطه (3.2-18) معادله اویلر بدست می آید. شرایط مرزی نیز چنین می شود:

$$\text{either } \delta y = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \text{at} \quad x = x_1 , \ x = x_2$$

$$(3.2-19)$$

دقت شود که $\delta y = 0$ در یک مرز یعنی اینکه y در آن مرز کاملاً مشخص است.

3.3. Further Properties of δ

در نظر بگیرید:

$$F_1 \equiv F_1(x, y, y')$$

$$F_2 \equiv F_2(x, y, y')$$

$$\delta(F_1 F_2) = \frac{\partial F_1 F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1 F_2}{\partial y'}\delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}F_2 + F_1\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y'}F_2 + F_1\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)\delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right)F_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right)F_1$$

$$\boxed{\delta(F_1 F_2) = (\delta F_1)F_2 + F_1(\delta F_2)} \qquad (3.2.1)$$

بنابراین

$$\delta(F^2) = 2F\,\delta F \qquad (3.3\text{-}2)$$

حال اگر $F \equiv y$ داریم:

$$\delta y^2 = 2y\,\delta y \qquad (3.3\text{-}3a)$$

و همچنین با قرار دادن $F \equiv y'$ داریم:

$$\delta(y'^2) = 2y'\,\delta y' \qquad (3.3\text{-}3b)$$

دیده می‌شود که اپراتور δ همان رفتاری را بر روی پارامترهای وابسته دارد که اپراتور $\frac{d}{dx}$ بر روی پارامترهای مستقل.

مثال ۱: فانکشنال زیر را در نظر بگیرید:

$$I(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u',u'')\,dx \qquad (3.3\text{-}4)$$

خواهیم داشت

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \right) dx \qquad (3.3\text{-}5)$$

حال در نظر بگیرید:

$$F = \frac{c_0}{2} u^2 + \frac{c_1}{4} u'^4 + \frac{c_2}{2} u''^2 + f(x)\, u \qquad (3.3\text{-}6)$$

بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial u} = c_0 u + f \, , \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = c_1 u'^3 \, , \quad \frac{\partial F}{\partial u''} = c_2 u'' \qquad (3.3\text{-}7)$$

آنها را در (3.3-5) قرار دهیم:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[(c_0 u + f) \delta u + c_1 u'^3 \delta u' + c_2 u'' \delta u'' \right] dx \qquad (3.3\text{-}8)$$

این مسئله را راحت‌تر نمی‌توان حل کرد:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{c_0}{2} u^2 + \frac{c_1}{4} u'^4 + \frac{c_2}{2} u''^2 + f u \right) dx \qquad (3.3-9)$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(c_0 u\, \delta u + c_1 u'^3 \delta u' + c_2 u'' \delta u'' + f\, \delta u \right) dx \qquad (3.3-10)$$

که همان رابطه (3.3-8) می‌باشد.