بسم الله الرحمن الرحیم　　　　انرژی　　　　جلسه ۸

if $H \equiv H(x, y_i's, p_i's)$ then $dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$ (5.1-5)

از طرف دیگر از (5.1-4) داریم:

$$dH = \underbrace{-\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i - \sum_{i=1}^{n} \cancel{\frac{\partial F}{\partial y_i'}} dy_i'}_{dF} + \sum_{i=1}^{n} \cancel{dy_i'} p_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i$$

$$\Rightarrow dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i \qquad (5.1\text{-}7)$$

از مقایسه (5.1-5) و (5.1-7) داریم:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad (5.1\text{-}8a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad (5.1\text{-}8b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i' \qquad (5.1\text{-}8c)$$

(5.1-2), (5.1-3)

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{dp_i}{dx} \qquad (5.1\text{-}9)$$

لذا با توجه به (5.1-8b) و (5.1-8c) به 2n معادله درجه یک به صورت زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_i}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &i = 1, 2, \dots, n \qquad (5.1\text{-}10a) \\ &i = 1, 2, \dots, n \qquad (5.1\text{-}10b) \end{aligned}$$

به این معادلات، معادلات اویلر در سیستم کانونی

(Canonical system of Euler's equations) می‌گویند.

(در دینامیک Hamilton's canonical eq. می‌گویند)

Euler's eq یا

$$\begin{cases} p' = -H_{,y} \\ y' = H_{,p} \end{cases}$$

حال دوباره رابطه (5.1-5) را می نویسیم

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx} \qquad (5.1\text{-}11)$$

از رابطه کانونی (5.1-10) نتیجه می شود:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial x} \qquad (5.1\text{-}12)$$

$$\xrightarrow[(5.1\text{-}8a)]{(5.1\text{-}12)} \quad \boxed{\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}} \qquad (5.1\text{-}13)$$

پس اگر F برحسب x نباشد آنگاه H مستقل از x است و در

طول مسیر ثابت می ماند (انتگرال اول)

5.2 Hamilton's Equations from the variational principle

در این بخش می‌خواهیم روابط کانونی همیلتون را با استفاده از روش حساب تغییرات بیابیم:

(5.1-4) $$F = -H(x, y_i's, p_i's) + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i \qquad (5.2\text{-}1)$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-H + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i\right) dx$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\delta y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} \delta y_i' p_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' \delta p_i\right] dx$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{dp_i}{dx}\right)\delta y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(y_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right] dx + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta y_i\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}}_{=0}$$

(5.2-2)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (5.2\text{-}3)$$

5.3- Poisson's Bracket and First Integral of Motion

پواسون در سال 1809 عملگری را تحت علامت براکت چنین تعریف کرد:

$$[\phi,\psi] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\phi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right) \qquad (5.3\text{-}1)$$

که در آن

$$\phi = \phi(x, q_i\text{'s}, p_i\text{'s})$$
$$\psi = \psi(x, q_i\text{'s}, p_i\text{'s}) \qquad (5.3\text{-}2)$$

این عملگر کمک خوبی در یافتن انتگرال های اولی می کند. چند خواص جبری این عملگر از قرار زیرند:

$$[\phi,\phi] = 0 \qquad (5.3\text{-}3a)$$

$$[\phi,\psi] = -[\psi,\phi] \quad (\text{انعکاسی}) \qquad (5.3\text{-}3b)$$

$$[\phi,\psi+\lambda] = [\phi,\psi] + [\phi,\lambda] \qquad (5.3\text{-}3c)$$

$$[\phi, \psi\lambda] = [\phi, \psi]\lambda + \psi[\phi, \lambda] \qquad (5.3\text{-}3d)$$

$$[\phi, [\psi, \lambda]] + [\lambda, [\phi, \psi]] + [\psi, [\lambda, \phi]] = 0 \qquad (5.3\text{-}3e)$$

Jacobian Identity   اتحاد ژاکوبی

همچنین با استفاده از تعریف براکت پواسون داریم:

$$[y_i, y_k] = 0 \qquad (5.3\text{-}4a)$$

$$[p_i, p_k] = 0 \qquad (5.3\text{-}4b)$$

$$[y_i, p_k] = \overset{\text{کرونکر دلتا}}{\delta_{ik}} \qquad (5.3\text{-}4c)$$

پس هر یک از پارامترهای تشکیل دهنده F تحت عملگر پواسون با پارامترهای همین خود صفر می‌شوند و با غیرهمین خود δ_{ik} می‌شوند.

حال می‌گوییم:

$$[\phi, H] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \phi}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial y_j} \right) \qquad (5.3-5)$$

$$\xrightarrow{(5.2-3)} \quad [\phi, H] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_j} y'_j + \frac{\partial \phi}{\partial p_j} p'_j \right) = \frac{d\phi}{dx} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + [\phi, H]} \qquad (5.3-6)$$

پس می‌توان گفت اگر در تابع ϕ، x مستقیماً ظاهر نشده باشد شرط اینکه انتگرال اول باشد این است که

$$[\phi, H] = 0 \qquad (5.3-7)$$

مثلاً خود H در صورتیکه مستقیماً x در آن ظاهر نشده باشد انتگرال اول است.

در رابطه (5.3-5) بجای ϕ پارامتر y_i را قرار می‌دهیم:

$$[y_i, H] = \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (\equiv y_i') \qquad (5.3\text{-}8)$$

همچنین اگر بجای ϕ، پارامتر p_i را قرار دهیم:

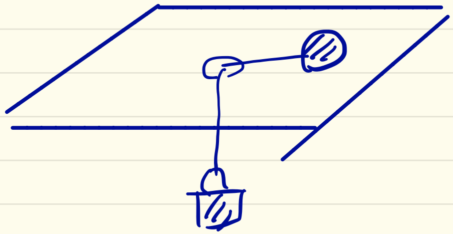
$$[p_i, H] = \sum_{j=1}^{n} \left(-\delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (\equiv p_i') \qquad (5.3\text{-}9)$$

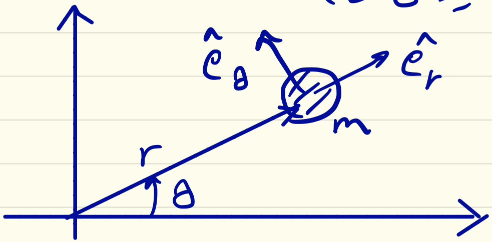
پس با توجه به رابطه (5.2-3) می‌توان معادلات همیلتون را با استفاده از براکت پواسون چنین کانونیکال کرد:

$$\frac{dy_i}{dx} = [y_i, H] \quad \text{و} \quad \frac{dp_i}{dx} = [p_i, H] \qquad (5.3\text{-}10)$$

$$\text{Euler's eq.} \quad \text{و} \quad \begin{cases} p' = -H_{,y} \\ y' = H_{,p} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} p' = [p, H] \\ y' = [y, H] \end{cases}$$

مثال: ذره‌ای را در یک صفحه که فقط میدان نیروی جانب مرکز دارد در نظر بگیرید (مثلاً جسم با یک نخ به مرکز کشیده می‌شود)





$$I=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\,\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad (5.3\text{-}11)$$

تعریف لاگرانژی

$$L = T - V(r) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \qquad (5.3\text{-}12)$$

انرژی پتانسیل

قرار دادیم
$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \end{cases} \longrightarrow \text{generalized momentums} \begin{cases} p_1 \equiv p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_2 \equiv p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \qquad (5.3\text{-}13)$$

به عبارت دیگر

$$\dot r = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (5.3\text{-}14)$$

از طرفی

$$H = -L + \dot q_1 p_1 + \dot q_2 p_2$$

$$H = -\frac{m}{2}(\dot r^2 + r\dot\theta^2) + V(r) + \dot r p_r + \dot\theta p_\theta \qquad (5.3\text{-}15)$$

$$\xrightarrow{5.3\text{-}14} \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m} + V(r) \equiv H(t, r, \theta, p_r, p_\theta) \qquad (5.3\text{-}16)$$