بسم الله الرحمن الرحیم　　　　انرژی　　　　جلسه ۷

4.4 - First Integrals of Euler's Equation

بار دیگر در نظر بگیرید.

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (4.4\text{-}1)$$

معادله اویلر چنین خواهد بود:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (4.4\text{-}2)$$

از طرفی می دانیم:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'' \qquad (4.4\text{-}3)$$

$$\xrightarrow{4.4\text{-}2} -\frac{dF}{dx}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y''=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(-F+\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right)+\frac{\partial F}{\partial x}=0} \qquad 4.4\text{-}4$$

روش دیگر بیان اویلر

if $F(x, y')$ then $\frac{\partial F}{\partial y'} = c$ (4.4-5)

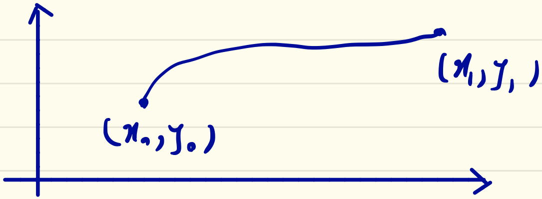
if $F(y, y')$ then $-F + y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$ (4.4-6)

این چنین فانکشنال ها یی مانند (4.4-5) و (4.4-6) که برای تابع اکسترمال مقداری ثابت دارند را انتگرال اول (first integral) معادله اویلر می نامند (در دینامیک به آنها انتگرال اول حرکت می گویند)

Applications:

1- Minimal path problems

1-1- shortest curve between tow points:



$$S = \int ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$ minimmum

$$\longrightarrow \delta S = 0 \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

if $F(x, y') \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = c \longrightarrow 2y' \times \frac{1}{2} \times (1+y'^2)^{-1/2} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c$ (*)

if $F(y, y') \longrightarrow -F + \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C$ (**)

$\xrightarrow{(*)} y'^2 = c(1+y'^2) \longrightarrow y'^2(1-c) = c \longrightarrow y' = c$

$\longrightarrow y = ax + b$

B.C. $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$

حل دیگر: معادله اویلر $\Rightarrow$ $0 + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \longrightarrow \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}} + \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}}\, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' = 0 \longrightarrow \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}\, y'' = 0 \longrightarrow y'' = 0 \longrightarrow y = ax + b$$

1-2. The Brachistochrone Problem

وزنه‌ای با وزن خود از این مسیر پایین می‌آید.
منحنی را پیدا کنید که کمترین زمان را سپری کند.

بقای انرژی

$$E_p = E_K$$

$$mg(y_0 - y) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)} = \frac{ds}{dt}$$

$$t=\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\,dx$$ minimmum

$$\delta t = 0 \longrightarrow$$ معادله اویلر

$$F(y,y') \longrightarrow -F + \frac{\partial F}{\partial y'}\,y' = C$$

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} + \frac{y'\cdot y'}{\sqrt{y_0-y}\cdot\sqrt{1+y'^2}} = C \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)(y_0-y)}} = C$$

$$(1+y'^2)(y_0-y)=C \longrightarrow y'^2 = \frac{C}{y_0-y}-1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C-(y_0-y)}}{\sqrt{y_0-y}} \longrightarrow x = \int \frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{C-(y_0-y)}}\,dy$$

$$y_0 - y = C\sin^2 t/2 \qquad (*)$$

$$x = c_1 \int \sin^2(t/2)\, dt = c(t - \sin t) + c'$$

$$(*) \longrightarrow y = y_0 - c^2(1 - \cos t)$$

1-3. Fermat's Principle

مسیر حرکت نور در محیط ناهمگن

نور در یک محیط به گونه‌ای حرکت می‌کند که کوتاه‌ترین زمان در مسیر را بپیماید. مثلاً اگر سرعت حرکت نور در محیطی $c(y)$ باشد داریم.

$$c = c(y)$$

$$c(y) = \frac{ds}{dt} \longrightarrow t = \int \frac{ds}{c(y)} = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c(y)}\, dx$$

$$\delta t = 0 \longrightarrow -F + y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c_0 \longrightarrow \frac{1}{c(y)\sqrt{1+y'^2}} = c_0$$

$$x = \int dx = c_0 \int \frac{c(y)}{\sqrt{1 + c_0^2 c^2(y)}}\, dy$$

1-4. Particle moving in the gravitational field

طبق اصل همیلتون ذره‌ای که با قدرت وزن خود حرکت می‌کند مسیری را انتخاب می‌کند که انرژی جنبشی آن مینیمم باشد

$$I = 2\int E_k\, dt \qquad \text{minimmum}$$

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2} m v^2 \\ v\,dt &= ds \end{aligned}\right\} \longrightarrow I = m\int v\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \longrightarrow I = m\int \sqrt{v_0^2 - 2gy}\,\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$\longrightarrow -F + y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c_0 \longrightarrow \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}{\sqrt{1+y'^2}} = c_0$$

$$y = x\, tg\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0 \cos^2\alpha}$$

Chapter V

Hamiltonian Formulation and First Integrals of Motion

5.1 - Introduction

در دینامیک ذرات یا اجسام صلب با چنین فانکشنال‌هائی برخورد می‌کنیم:

$$I(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)\, dx \qquad (5.1-1)$$

که معادله اویلر آن چنین می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (5.1-2)$$

که n معادله دیفرانسیل درجه دو است.

برای راحتی کار این معادلات را بصورت همیلتونی بازنویسی می‌کنیم. در این

صورت به $2n$ معادلهٔ درجه یک خواهیم رسید. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}} \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (5.1\text{-}3)$$

در دینامیک به p_i ها generalized momentum می‌گویند.

همچنین H با نام هامیلتونی (Hamiltonian (function)) چنین معرفی می‌شود

$$\boxed{H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i} \qquad (5.1\text{-}4)$$

$f(x,y)$

$z = 3x + 5y \longrightarrow y = \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}x$

مستقل

$\frac{\partial z}{\partial x} \neq 0 = 3$

$\partial y / \partial x = 0$

$f(x,z)$

مستقل

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -3/5$