به عبارت دیگر

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \qquad (5.3-14)$$

از طرف دیگر:

$$H = -L + \dot{q}_1 P_1 + \dot{q}_2 P_2$$

$$\Rightarrow H = -\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) + \dot{r}P_r + \dot{\theta}P_\theta \qquad (5.3-15)$$

$$\xrightarrow{(5.3-14)} H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = H(t, r, \theta, P_r, P_\theta) \qquad (5.3-16)$$

از طرف معادله اویلر برای لاگرانژین چنین می‌شود

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad (5.3-17a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \qquad (5.3-17b)$$

چون در L پارامتر θ صریحاً ظاهر نشده است پس با استفاده از (5.3-17b) داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \equiv p_\theta = \boxed{m r^2 \dot{\theta} = cte = \alpha_\theta} \qquad (5.3\text{-}18)$$

در این حالت می‌گوییم که θ یک مختصات بی‌تفاوت است. در این حالت مومنتم p_θ یک انتگرال اول است.

این نتیجه با استفاده از (5.3-6) نیز قابل دسترسی است:

$$\frac{dp_\theta}{dt} = [p_\theta, H] + \frac{\partial p_\theta}{\partial t}$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \left[p_\theta, \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right]$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \underbrace{\left[p_\theta, \frac{p_r^2}{2m}\right]}_{0\ (5.3\text{-}4b)} + \underbrace{\left[p_\theta, \frac{p_\theta^2}{2mr^2}\right]}_{0\ (5.3\text{-}4b)} + \underbrace{\left[p_\theta, V(r)\right]}_{0\ (5.3\text{-}4c)} = 0 \qquad (5.3\text{-}19)$$

جلسه ۹ روش های انرژی بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان میان ترم : دوشنبه ۲۹ آبان

$\Rightarrow P_\theta = \text{Constant}$

انرژی کل سیستم چنین بدست می آید

$$E = T + V(r) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \qquad (5.3\text{-}20)$$

$$E = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (5.3\text{-}21)$$

$$\xrightarrow{(5.3\text{-}6)} \frac{dE}{dt} = [E, H] + \cancel{\frac{\partial E}{\partial t}} = 0 \qquad (5.3\text{-}22)$$

$\Rightarrow E \equiv$ a First Integral of Euler's Equations

$$\boxed{E = \alpha_r} \qquad (5.3\text{-}23)$$

$$\xrightarrow{(5.3\text{-}21)} P_r = \sqrt{2m(\alpha_r - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r}} = m\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad t+\beta_1 = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\alpha_r - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} \qquad (5.3\text{-}24a)$$

از طرف دیگر $\quad dt = \dfrac{m\,dr}{\sqrt{\boxed{\quad}}}$

و می‌دانیم $\quad \alpha_\theta = mr^2 \dfrac{d\theta}{dt} \longrightarrow dt = \dfrac{mr^2}{\alpha_\theta} d\theta$

$$\left.\begin{matrix} dt = \dfrac{m\,dr}{\sqrt{\boxed{\quad}}} \\ dt = \dfrac{mr^2}{\alpha_\theta} d\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\theta = \frac{\alpha_\theta\, dr}{\sqrt{\boxed{\quad}}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \beta_2 = \int \frac{\alpha_\theta\, dr}{\sqrt{2m(\alpha_r - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} \cdot \frac{1}{r^2} \qquad (5.3\text{-}24b)$$

روابط (5.3-24) تحت عنوان "انتگرال کامل" معادلات اویلر
(Complete Integral of Euler's Eq.) شناخته می‌شوند که چهار
ثابت $\alpha_r, \alpha_\theta, \beta_1, \beta_2$ با شرایط اولیه

$$r(0) = r_0 \;,\; \dot r(0) = \dot r_0 \;,\; \theta(0) = \theta_0 \;,\; \dot\theta(0) = \dot\theta_0$$

قابل دست یابی هستند. لذا می‌توان $r(t)$ و $\theta(t)$ را یافت. در اپندیس (5-A) این مسأله کاملاً توضیح داده خواهد شد.

Chapter VI Functionals with Constraints

6.1_ Introduction

مسأله حساب تغییراتی که تاکنون مورد بررسی قرار دادیم بدون قید بودند. ولی در مسائلی تابع اکسترمال در بازهٔ $[x_1, x_2]$ باید تابع مقیدکننده‌ای را نیز ارضاء کند.

این قیود از توابع قید در دسته هستند، یا بصورت "تابع ساده" (Function Constraints) و یا قیود "انتگرالی" (Integral Constraints).

6.2_ Function Constraints

یک مسأله حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\, dx = 0 \qquad (6.2-1)$$

که باید m قید زیر را نیز ارضا کنند.

$$\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad i=1,\dots,m<n \qquad (6.2-2)$$

در دینامیک با این مسائل برخورد زیادی خواهیم داشت:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i's, \dot{q}_i's)\,dt = 0 \qquad (6.2-3)$$

with

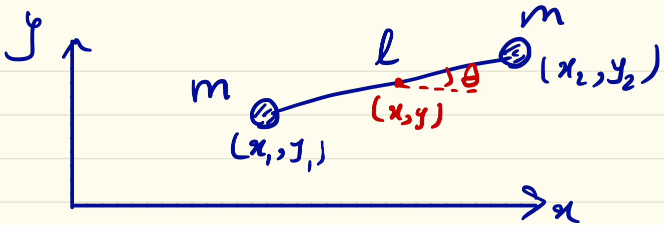
$$\Phi_i(t, q_i's) = 0 \qquad i=1,\dots,m<n$$

به چنین متعددی، قیودی holonomic می‌گویند که خود بر دو قسم است

rheonomic — t مستقیم در رابطه دیده شود

scleronomic — t در رابطه مستقیم دیده نمی‌شود

بطور مثال دو گوی را در یک صفحه در نظر بگیرید که با میله‌ای بهم متصل باشند.



درنظر بگیریم

$$\begin{cases} q_1 \equiv x_1(t) \\ q_2 \equiv y_1(t) \\ q_3 \equiv x_2(t) \\ q_4 \equiv y_2(t) \end{cases}$$

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(t,x_1,y_1,x_2,y_2,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2)\,dt=0 \qquad (6.2\text{-}5)$$

Constraint: $$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \qquad (6.2\text{-}6)$$

تعداد کل درجه آزادی : $n-m=4-1=3$

می‌توانستیم این سیستم را چنین درنظر بگیریم:

$$q_1\equiv x(t)\ ,\quad q_2\equiv y(t)\ ,\quad q_3\equiv\theta(t)$$

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(t,x,y,\theta,\dot{x},\dot{y},\dot{\theta})\,dt=0 \qquad (6.2\text{-}7)$$

که این یک مسأله حساب تغییرات آزاد (بدون قید) است.

این یک قانون کلی است که یک مسأله حساب تغییرات با قیود holonomic به شرطی که q_i ها مستقل از هم نباشند قابل تبدیل به یک مسأله آزاد حساب تغییرات است.

حال اگر در رابطه (6.2-6) طول میله چنین باشد

$$l = l(t)$$

در این صورت این قید هولونومیک rheonomic است.

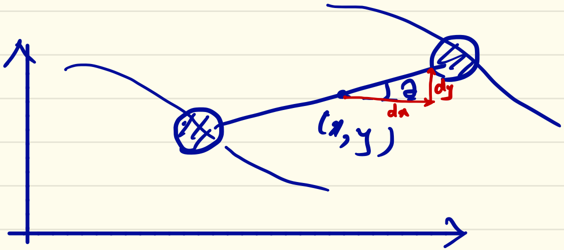
حال فرض کنید قیودها بصورت Pfaffian form باشد

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, q_1, \dots, q_n)\, dq_j + a_{it}(t, q_1, \dots, q_n)\, dt = 0 \qquad (6.2\text{-}8)$$

اگر این رابطه انتگرال پذیر نباشد تا بصورت آنچه در رابطه (6.2-4) آمده تبدیل گردد به آن قیود nonholonomic می‌گویند. دقت شود که این

دسته از قیود هم دو قسم هستند: rheonomic, Scleronomic

به عنوان مثال فرض کنید در مثال قبل دو گوی را روی دو ریل قرار داده باشیم که قابل حرکت فقط در آن دو مسیر هستند.



مثل چرخ ماشین که سرعت در راستای میله صفر است.

$$\begin{cases} q_1 \equiv x(t) \\ q_2 \equiv y(t) \\ q_3 \equiv \theta(t) \end{cases} \quad \text{و} \quad L = L(t, x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) \qquad (6.2\text{-}9)$$

Constraint

$$(\cos\theta)\,dx + (\sin\theta)\,dy + (0)\,d\theta + (0)\,dt$$

$$\equiv a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,d\theta + a_4\,dt = 0$$

$$(6.2\text{-}10)$$