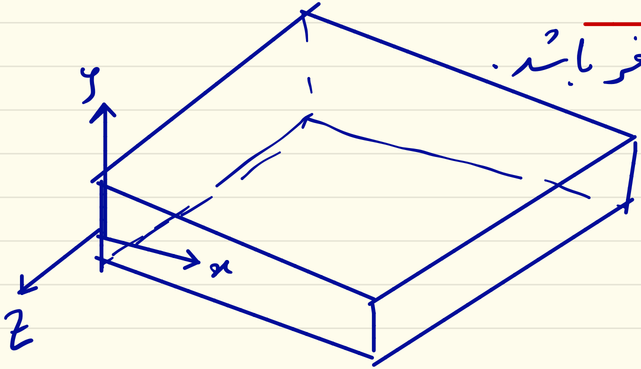
بسم الله الرحمن الرحیم

ضربه

جلسه ۲

۵-۱. انتشار موج محوری در شرایط کرنش صفحه‌ای



الف - ابتدا فرض می‌کنیم که در جهت z کرنش صفر باشد.

$$\varepsilon_z = 0, \quad \sigma_y = 0 \qquad (a)$$

برای موج فشاری می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (b)$$

از رابطه هوک:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu \sigma_x\right) \qquad (c)$$

چون فرض کردیم σ_x فشاری است پس:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(-\sigma_x)\right) \qquad (d)$$

$$\varepsilon_z = 0 \longrightarrow \sigma_z = -\nu \sigma_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left((-\sigma_x) - \nu\overbrace{(-\nu\sigma_x)}^{\sigma_z}\right) \qquad (e)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(1-\nu^2)}{E}\sigma_x \qquad (f)$$

$$(b),(f) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (1.7)$$

$$C'_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \Rightarrow \frac{C'_L}{C_L} = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \qquad (1.8)$$

ب- حال فرض می‌کنیم در دو جهت y و z مقید شده باشد:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \qquad (a)$$

پس می‌توان شرایط را در جهت y و z یکسان گرفت

$$\sigma_y = \sigma_z$$

قانون هوک

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_y + (-\sigma_x)\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = 0 \longrightarrow \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \qquad (b)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(-\sigma_x) - \nu(2\sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[-\sigma_x - 2\nu\left(\frac{-\nu}{1-\nu}\right)\sigma_x\right] \qquad (c)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\sigma_x \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \qquad (d)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (1-9)$$

$$c_L'' = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}, \qquad \frac{c_L''}{c_L} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \qquad (1-10)$$

ν	$1/4$	$1/3$	$1/2$
c'_L/c_L	1.03	1.06	1.15
c''_L/c_L	1.1	1.22	∞

1-6 ـ رابطه شدت تنش و سرعت ذرات

گفتیم

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (a)$$

و برای تنش فشاری

$$\sigma_0 = -E\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (b)$$

همین بیان شکل :

$$u = f(x - ct)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (c)$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{E}{c_L}\frac{\partial u}{\partial t} = \overbrace{\frac{E}{\underbrace{c_L}_{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}}}^{\sqrt{E\rho}} v$$

$$\boxed{\sigma_0 = \rho C_L v} \qquad (1-11)$$

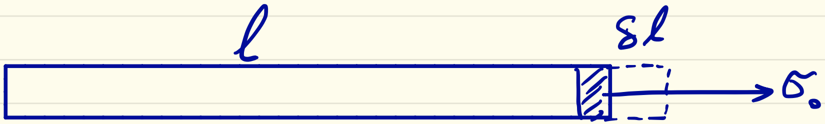
این رابطه برای موج کششی نیز قابل استفاده است.

این رابطه را به گونه دیگری نیز می‌توان نمایش داد

$$v = \frac{\sigma_0}{\sqrt{E\rho}} \qquad (1-12)$$

مقدار ρC در سیال را "امپدانس مکانیکی" می‌گویند.

۱.۷ - عبارت دقیق‌تر سرعت موج با در نظر گرفتن ازدیاد طول میله



وقتی موج تنش σ_0 به انتهای میله می‌رسد کل جابجایی ذرات میله δl خواهد بود.

در زمان طی کردن این طول توسط ذرات، موج تنش مسافت $l+\delta l$ را طی می‌کند.

$$\delta l = l\,\frac{\sigma_0}{E} \qquad (a)$$

$$\frac{l\left(1+\frac{\sigma_0}{E}\right)}{C_E} = \frac{l\,\frac{\sigma_0}{E}}{v} \qquad (b)$$

سرعت موج

$$C_E = \frac{v\left(1+\frac{\sigma_0}{E}\right)}{\sigma_0/E} \qquad (c)$$

C_E سرعت انتشار موج در حالت جدید می‌باشد.

د) 13-1 برای موج کششی

$$\boxed{C_E = C_L + v}$$

دالامبر (c) بعدی
$\longrightarrow$
قبل

به طریق مشابه برای موج فشاری

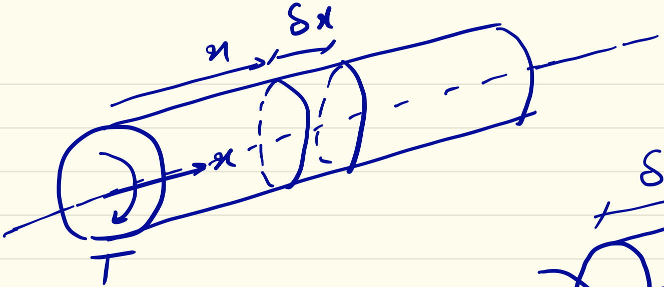
$$\boxed{C_E = C_L - v}$$

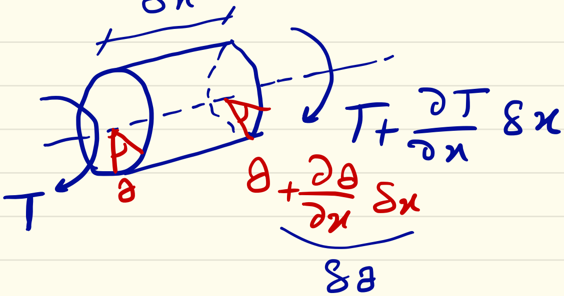
$$\frac{C_E}{C_L} = 1 + \frac{v}{C_L}$$

در برخوردهای مکانیکی v از مرتبه $10 \; ft/s$ ($\sim 3 \; m/s$) است و سرعت C_L از مرتبه $10000 \; ft/s$

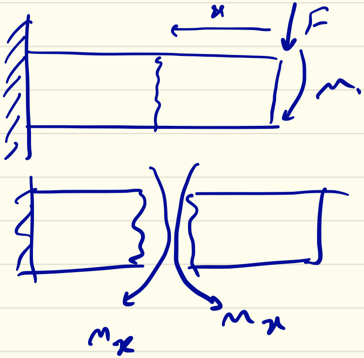
لذا در حالتهای برخورد الاستیک فرق قابل توجهی بین C_L و C_E وجود ندارد.

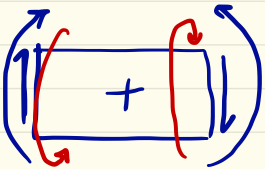
۸-۱ ـ انتشار موج پیچشی





$$\sum T = I\alpha$$

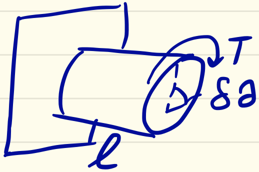




برای المان کوچک $\quad \frac{\partial T}{\partial x}\delta x = (I.\delta x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$

ممان اینرسی المان به طول δx = $I\cdot\delta x$

از طرفی داریم: (a) $\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\delta x$ و $\delta\theta = \frac{T\cdot\delta x}{JG}$



$$T = JG\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (1-17)$$

$$\xrightarrow{(1-16,17)} \quad \boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{JG}{I}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}} \qquad (1-18)$$

$$C_T = \sqrt{\frac{JG}{I}}$$

از طرفی می‌توان گفت $I = \rho_0 J$

$$\boxed{C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}}$$

$$\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{2(1+\nu)} \qquad (1-21)$$

$$0 \leq \nu \leq 0.5 \longrightarrow \sqrt{2} \leq \frac{c_L}{c_T} \leq \sqrt{3} \qquad (1-22)$$

مانند آنچه برای موج تنش نرمال گفته شد می‌توان اینجا نیز گفت:

$$\theta = g(x-ct) \qquad (b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = g'(x-ct) \qquad (c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -c_T\, g'(x-ct) \qquad (d)$$

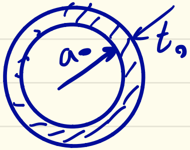
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{c_T}\frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad (e)$$

از طرفی $\quad T = JG\frac{\partial \theta}{\partial x} \longrightarrow T = \frac{JG}{c_T}\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$T = J\sqrt{G\rho_0}\,\omega \qquad (1-22)$$

که در آن $\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ سرعت زاویه‌ای ذرات می‌باشد.

اگر یک لوله جدار نازک با شعاع a_0 و ضخامت t_0 در نظر بگیریم با فرض تنش یکنواخت روی مقطع، می‌توان گفت:



$$J = 2\pi a_0 t_0 a_0^2 = 2\pi a_0^3 t_0$$

$$\xrightarrow{1-22} \quad \overbrace{\tau \cdot \overbrace{2\pi a_0}^{A}}^{F} \cdot a_0 = \overbrace{2\pi a_0^3 t_0}^{J}\sqrt{G\rho}\,\omega$$

$$\tau = \rho_0 C_T (a\omega) \qquad (1-23)$$

فقط برای لوله‌های جدار نازک