بسم الله الرحمن الرحیم　　　　روش های انرژی　　　　جلسه ۲

chapter II: The ϵ method

2.1 Introduction

2.2- Fundamental Lemma of Calculus of Variation

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\,\eta(x)\,dx = 0 \qquad (2.2-1)$$

اگر این رابطه برای تمام توابع پیوسته $\eta(x)$ که شرایط مرزی

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \qquad (2.2-2)$$

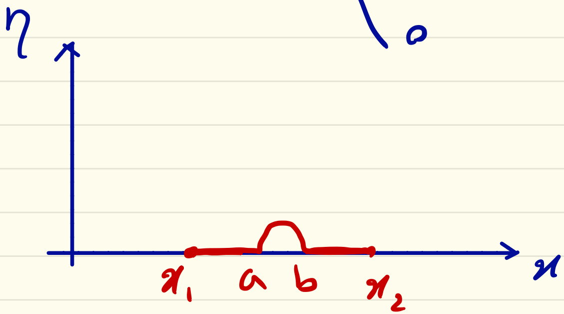
را ارضا می‌کنند برقرار باشد و تابع $G(x)$ هم در بازه $[x_1, x_2]$ پیوسته باشد قضیه اساسی حساب تغییرات بیان می‌کند که

$$G(x) = 0 \qquad (2.2-3)$$

اثبات: اگر فرض کنید $G(x)$ در نقاطی غیر صفر باشد، مثلاً مثبت باشد آنگاه $\eta(x)$ را

چنین فرض می‌کنیم:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x_1 \le x \le a \\ (x-a)(b-x) & a < x < b \\ 0 & b \le x \le x_2 \end{cases} \qquad (2.2-4)$$



آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\,\eta(x)\,dx = \int_a^b G(x)(x-a)(b-x)\,dx > 0 \qquad (2.2-5)$$

که خلاف فرض اولیه است.

2.3. The E method

درباره ساده‌ترین حالت مسأله تغییرات را در نظر بگیرید:

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (2.3\text{-}1a)$$

$$y(x_1)=y_1 \quad \text{and} \quad y(x_2)=y_2 \qquad (2.3\text{-}1b)$$

فرض کنید $y(x)$ تابع اکسترمال فانکشنال "I" باشد که I را مینیمم می‌کند.

اگر $\tilde{y}(x)$ یک تابع ممکن باشد به راحتی می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\tilde{y}(x)=y(x)+h(x) \qquad (2.3\text{-}2)$$

که

$$\tilde{y}(x_1)=y_1\,,\quad \tilde{y}(x_2)=y_2 \qquad (2.3\text{-}3)$$

$$\Rightarrow \quad h(x_1)=0\,,\quad h(x_2)=0 \qquad (2.3\text{-}4)$$

پس می‌توان گفت:

$$I(\tilde{y}) \geq I(y) \qquad (2.3\text{-}5)$$

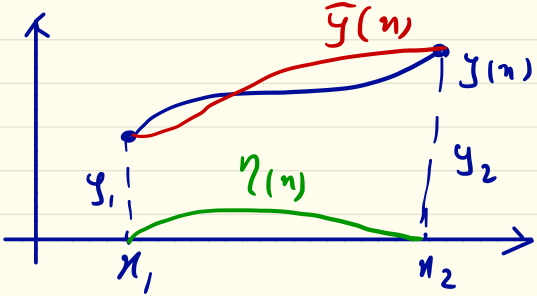
حال می‌خواهیم فانکشنال $I(y)$ را تبدیل به یک تابع کنیم تا از قضایای اثبات شده در مورد توابع استفاده کنیم. برای این کار یک تابع $\eta(x)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

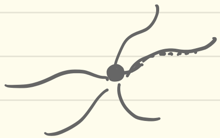
$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \qquad (2.3\text{-}6)$$

حال $\tilde{y}(x)$ را چنین در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon\, \eta(x) \qquad (2.3\text{-}7)$$

اگر $\eta(x)$ تابع ثابتی باشد و ϵ پارامتر به اندازه کافی کوچک باشد آنگاه رابطه (2.3-7) یک دسته تابع ممکن در همسایگی تابع اکسترمال $y(x)$ را نشان می‌دهد که از یک مسیر به $y(x)$ نزدیک می‌شوند.





$$I(\check{y}) = I(y+\epsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\, dx \qquad (2.3\text{-}8)$$

در رابطه فوق " I " تابعی از ϵ نمایش داده شده است

$$\tilde{I}(\epsilon) = I(y+\epsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\, dx \qquad (2.3\text{-}9)$$

حال از بسط تیلور استفاده می کنیم:

$$\tilde{I}(\epsilon) = \tilde{I}\Big|_{\epsilon=0} + \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\right).\epsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\right).\epsilon^2 + \cdots \qquad (2.3\text{-}10)$$

چون $\tilde{I}\Big|_{\epsilon=0} = I(y)$ لذا می توان گفت:

$$\tilde{I}(\epsilon) - I = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} + \frac{1}{2!}\epsilon^2\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\right)\Big|_{\epsilon=0} + \cdots$$

حال چنین تعریف می کنیم:

$$\delta^{(T)} I = \tilde{I}(\epsilon) - I$$ the Total Variation of "I"

$$\delta^{(1)} I = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\right)$$ the First Variation of "I"

$$\delta^{(2)} I = \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}\right)$$ the Second Variaton of "I"

(2.3-12)

پس رابطه (2.3-11) چنین بازنویسی می‌شود:

$$\delta^{(T)} I = \delta^{(1)} I + \delta^{(2)} I + \dots \qquad (2.3\text{-}13)$$

حال با استفاده از رابطه (2.3-9) داریم:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial \epsilon}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon}\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta' \right] dx \qquad (2.3\text{-}14)$$

$$\frac{d^2 \tilde{I}}{d\epsilon^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta' \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y}^2} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon} \right) \eta + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y}' \partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y}'^2} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon} \right) \eta' \right\} dx$$

که می‌شود:

$$\frac{d^2 \tilde{I}}{d\epsilon^2} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y}^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{y}'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{y}'^2} \eta'^2 \right] dx$$

$$(2.3\text{-}15)$$

بنابراین

$$\delta^{(1)} I = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right) = \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial\tilde{y}}\eta + \frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial\tilde{y}'}\eta'\right]\bigg|_{\epsilon=0} dx$$

$$= \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'\right]dx \qquad (2.3\text{-}16)$$

$$\delta^{(2)} I = \frac{1}{2!}\epsilon^2\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0}\right) = \frac{1}{2!}\epsilon^2\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial\tilde{y}^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial\tilde{y}\,\partial\tilde{y}'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial\tilde{y}'^2}\eta'^2\right]\bigg|_{\epsilon=0} dx$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^2\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2\right]dx$$

$$(2.3\text{-}17)$$