بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۱

daneshmehr.com — @energymethods

حضور در کلاس تاثیر مثبت دارد.

Refrence:

- Energy and variational methods in Applied Mechanics

By: J.N. Reddy

بارم بندی

| | |
|---|---|
| میان‌ترم | ۴ |
| پایان‌ترم | ۹ |
| پروژه | ۳ |
| تمرین | ۲ |

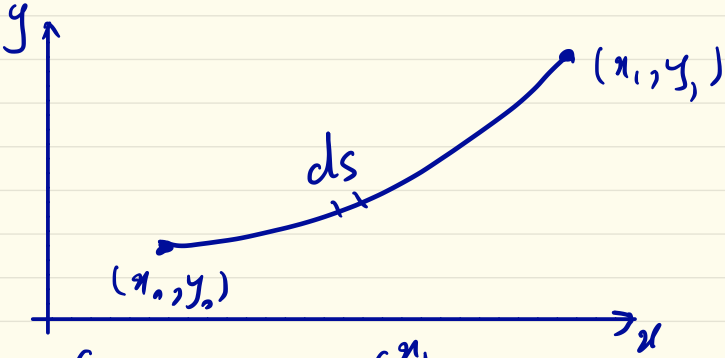
# Chapter I : Preliminary Remarks

## 1.1 _ Introductions

طناب را بین دو نقطه $(x_0, y_0)$ و $(x_1, y_1)$ در نظر بگیرید:

$\rho$: the mass density of the rope (mass per unit length)

$I$: the total gravitational potential energy of the rope




$y(x) \equiv$ تابعی از $x$

$$I = \int y g \rho ds = \int_{x_0}^{x_1} y \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \qquad (1.1\text{-}1a)$$

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(y,y')\,dx \qquad (1.1\text{-}1b)$$

بعداً دیده خواهد شد که بنا به اصل "مینیمم انرژی پتانسیل" طناب در حالتی به تعادل می‌رسد که انرژی پتانسیل کل آن مینیمم باشد. لذا اگر شکل طناب در حالت تعادل را با $y(x)$ نشان دهیم بنابراین اصل $I(y)$ مینیمم است.

اگر $\tilde{y}(x)$ هر شکل ممکن دیگری برای طناب باشد

$$I(\tilde{y}(x)) - I(y(x)) \geq 0 \qquad (1.1\text{-}2)$$

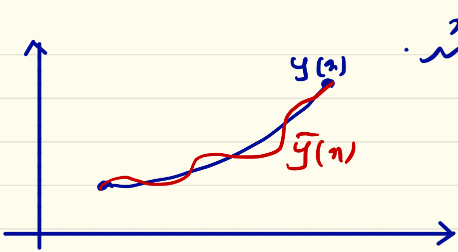
که تساوی وقتی برقرار است که $\tilde{y} = y$

در زبان ریاضی $I(y)$ را که تابعی از تابع‌ها است را یک Fanctional می‌نامند.

تابع $y(x)$ که $I(y)$ را مینیمم (ماکزیمم) می‌کند را extermal (function) می‌نامند.

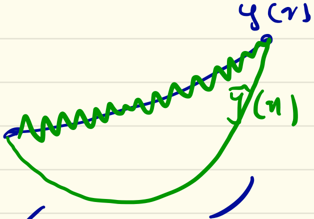
دقت شود که $\tilde{y}(x)$ باید تقریب ضعیف (weak variation) باشد

به این معنی که خود تابع و مشتقاتش نزدیکِ y(x) باشد.




اگر این شرایط را برداریم تقریب ما

خواهد شد. strong variat

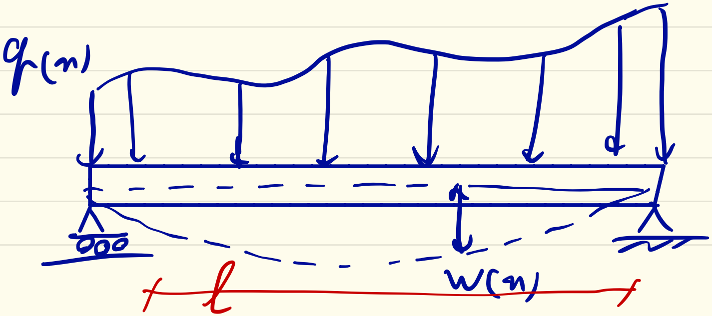



در حالت کلی در مسائل حساب تغییرات (variational) ما

دنبال تابع y(x) هستیم که فانکشنال I(y) را stationary بکند (مینیمم یا ماکزیمم یا نقطه عطف)

به عنوان مثال دیگر از کاربرد روش انرژی در حل مسائل، تیر دو سر تکیه‌گاه

ساده را در نظر بگیرید.

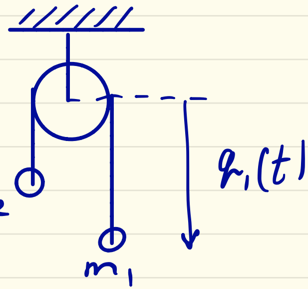


در اینجا نیز بنا به اصل مینیمم انرژی پتانسیل شکل تیر طوری تغییر می کند که انرژی پتانسیل کل مینیمم شود.

$$I(w)=\int_0^l \left[\frac{1}{2} E I_1\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - qw\right]dx \equiv \int_0^l F(w, w'')\, dx \qquad (1.1-3)$$

$I$ : بیانگر انرژی پتانسیل کل سیستم است و $I_1$ بیانگر ممان اینرسی سطح مقطع می باشد. $q(x)$ بارگذاری عرضی است.

در مثال دیگر یک قرقره ساده را در نظر بگیرید:

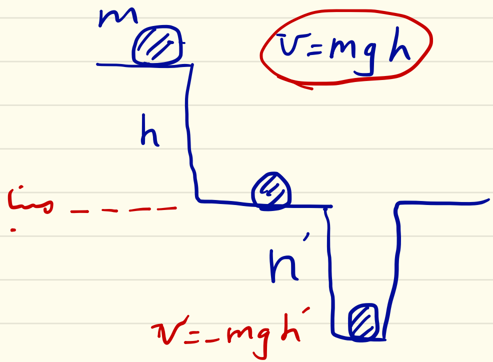



وقتی سیستم در حال حرکت است داریم:

$T \equiv$ Kinetic energy: $\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}_1^2$

$V \equiv$ gravitational potential energy =

$$V = -m_1 g q_1 - m_2 g(l - \pi r - q_1)$$




حال تابع لاگرانژی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$L = T - V \qquad (1.1\text{-}4)$$

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}_1^{\,2} + m_1 q_1 g + m_2 g(l - \pi r - q_1) \qquad (1.1\text{-}5)$$

L را بعضی اوقات Kinetic potential نیز می‌نامند.

بنا به اصل همیلتون که بعداً معرفی خواهد شد مسیر حرکت طناب $(q_1(t))$

به گونه‌ای خواهد بود که فانکشنال زیر استیشنری شود.

$$I(q_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dot{q}_1)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}_1^{2} + m_1 g q_1 + m_2 g(\ell - \pi r - q_1) \right] dt \qquad (1.1-7)$$

## 1.2 - The Leibnitz Rule

$$A(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)\, dx$$

$$\frac{dA}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx + f(x_2,t)\frac{dx_2}{dt} - f(x_1,t)\frac{dx_1}{dt} \qquad (1.2-1)$$