بسم الله الرحمن الرحیم — روش های انرژی — جلسه ۶

حال اجازه دهید به معادله (2.3-11) برگردیم. می دانیم که I مینیمم مقدار $\tilde{I}(\epsilon)$ می باشد.

یعنی

$$\underbrace{\tilde{I}(\epsilon) - I}_{\delta^{(1)} I} \geq 0 \qquad \text{for all } \epsilon \qquad (2.3\text{-}18)$$

که تساوی فقط وقتی اتفاق افتد که $\epsilon = 0$ باشد.

$$\epsilon \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} \geq 0 \longrightarrow \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} = 0 \qquad (2.3\text{-}19)$$

پس مسأله ما از یک مسأله variational تبدیل به یک مسأله ODE شد. حال می توان گفت:

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right] dx \qquad (2.3\text{-}20)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \eta \right] dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right)\Big|_{x_1}^{x_2} \qquad (2.3\text{-}21)$$

$$\xrightarrow{\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0} \quad \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta \, dx = 0 \qquad (2.3\text{-}22)$$

حال با توجه به اینکه $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ و مقدار داخل انتگرال پیوسته است براساس قضیه اساسی حساب تغییرات می توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0} \qquad (2.3\text{-}23)$$

به این معادله، معادله اویلر می گویند که در دینامیک به آن معادله لاگرانژ گفته می شود. این معادله شرط لازم برای تابع $y(x)$ است که بتواند اکسترمال باشد.

2.4 - Essential & Natural Boundary Conditions

دیدیم که برای مسأله variational اکسترمم کردن فانکشنال زیر

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \qquad (2.4-1)$$

منتهی شد به

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} = 0 \qquad (2.4-2)$$

و از آنجا طبق رابطه (2.3-20)

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \eta\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2} \eta(x_2) - \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} \eta(x_1) = 0$$

$$(2.4-3)$$

درحالت کلی این رابطه چنین قابل حل است که:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (2.4-9)$$

و همچنین

$$\text{either} \quad \eta(x_1) = 0 \quad \text{or} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0 \qquad (2.4-10a)$$

and

$$\text{either} \quad \eta(x_2) = 0 \quad \text{or} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} = 0 \qquad (2.4-10b)$$

از طرفی چون $\tilde{y} = y + \epsilon \eta$ پس می‌توان شرایط مرزی را چنین نوشت.

either $y(x_1) = y_1$ or $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0$ (2.4-11a)

and

either $y(x_2) = y_2$ or $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} = 0$ (2.4-11b)

اساسی essential b.c. natural b.c. طبیعی

Solid Mech. هندسی geometric b.c. force b.c. نیرویی

kinematic

2.5 Functinals Involving Higher_order Derivatives

extrimizing $$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')\,dx \qquad (2.5\text{-}1)$$

دوباره فرض می کنیم $\tilde{y}(x)=y(x)+\epsilon\,\eta(x)$ لذا داریم:

$$\delta^{(1)} I = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = \epsilon\left[\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}'')\,dx\right]\Bigg|_{\epsilon=0} = 0 \qquad (2.5\text{-}2)$$

$$\Rightarrow \left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon}+\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \epsilon}+\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}''}\frac{\partial \tilde{y}''}{\partial \epsilon}\right)dx\right]\Bigg|_{\epsilon=0}=0 \qquad (2.5\text{-}3)$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx=0 \qquad (2.5\text{-}4)$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\eta(x)\,dx+\left[\frac{\partial F}{\partial y''}\eta'(x)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta(x)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}=0$$

(2.5-5)

لذا این رابطه منتهی می‌شود به

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0}$$

(2.5-7)

either $\eta=0$ or $\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$ (2.5-7a) همین

and

either $\eta'=0$ or $\frac{\partial F}{\partial y''}=0$ (2.5-7b)

at $x=x_1$ and $x=x_2$

2.6 - Functionals with Several Dependent Variables

فرض کنید مسئله ما اکسترمم کردن فانکشنال زیر باشد:

$$I(y, z, \dots) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, \dots, y', z', \dots) \qquad (2.6-1)$$

$y(x), z(x), \dots$: dependent variables

x : independent variable

در حالت کلی می‌توان فانکشنال را چنین نشان داد:

$$I(q_1, q_2, \dots, q_n) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)\, dt \qquad (2.6-2)$$

که فرض می‌شود q_i ها با هیچ قیدی به هم وابسته نیستند.

برای راحتی کار، ساده‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم:

$$I(q_1, q_2) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\, dt \qquad (2.6\text{-}3)$$

انتگرال

در نظر می‌گیریم

$$\tilde{q}_1(t) = q_1(t) + \epsilon_1 \eta_1(t)$$
$$\tilde{q}_2(t) = q_2(t) + \epsilon_2 \eta_2(t) \qquad (2.6\text{-}4)$$

$$I(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2)\, dt \qquad (2.6\text{-}5)$$

$$\tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \left[\tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2)\right]\Big|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \epsilon_1 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Big|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_2}\right)\Big|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \cdots \qquad (2.6\text{-}6)$$

$$\Rightarrow \tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2) - I = \epsilon_1 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Big|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_2}\right)\Big|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \cdots \qquad (2.6\text{-}7)$$

$$\delta^{(T)} I = \tilde{I}(\epsilon_1, \epsilon_2) - I \qquad (2.6\text{-}8a)$$

$$\delta^{(1)} I = \epsilon_1 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_2}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} \qquad (2.6\text{-}8b)$$

حال بحث می‌کنیم که اگر q_1, q_2 توابع اکسترمال باشند آنگاه

$$\delta^{(1)} I = 0 \qquad (2.6\text{-}9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} = 0 & (2.6\text{-}10a) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_2}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1 = 0 \\ \epsilon_2 = 0}} = 0 & (2.6\text{-}10b) \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه (2.6-5) در روابط فوق داریم:

$$\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \epsilon_1}\right)\Bigg|_{\substack{\epsilon_1=0\\ \epsilon_2=0}} = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_1}\eta_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{\tilde{q}}_1}\dot{\eta}_1\right]\Bigg|_{\substack{\epsilon_1=0\\ \epsilon_2=0}} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\eta_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\dot{\eta}_1\right)dt = 0 \qquad (2.6\text{-}11)$$

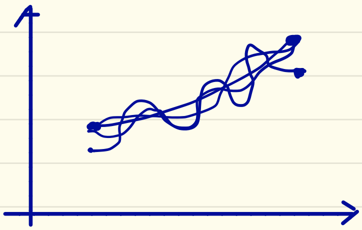
$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\right)\right]\eta_1\, dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\eta_1\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0 \qquad (2.6\text{-}12)$$

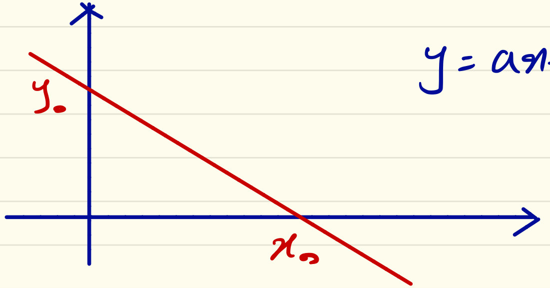
در نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} \eta_1(t_0) = \eta_1(t_1) = 0 & (2.6\text{-}13a) \\ \eta_2(t_0) = \eta_2(t_1) = 0 & (2.6\text{-}13b) \end{cases}$$

لذا بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1} = 0 \;,\quad \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2} = 0 \qquad (2.6\text{-}14)$$





$$y = ax + b$$

$$\left.\begin{aligned} x = 0 &\longrightarrow y_0 = b \Rightarrow \boxed{b = y_0} \\ y = 0 &\longrightarrow a x_0 + b = 0 \longrightarrow a = -\frac{y_0}{x_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0} x + y_0$$

لذا $i=1,2,\ldots,n$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}=0}$$

این معادلات می‌توانند مستقل یا کوپل باشند.