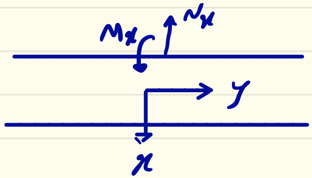
بسم الله الرحمن الرحیم

مواد مرکب

جلسه ۲۵

مثال: ورق استوانه ای با دو تکیه گاه ساده

شرایط مرزی:



$$N_{xx} = 0,\ w_0 = 0,\ M_{xx} = 0$$

Table 4.4.1: Boundary conditions in the classical (CLPT) and first-order shear deformation (FSDT) theories of beams and plate strips. The boundary conditions on u_0 and v_0 are only for laminated strips in cylindrical bending.

Edge Condition	CLPT		FSDT	
free	$N_{xx}=0$	$N_{xy}=0$	$N_{xx}=0$	$N_{xy}=0$
	$M_{xx}=0$	$\frac{dM_{xx}}{dx}=0$	$M_{xx}=0$	$Q_x=0$
roller	$w_0=0$	$\frac{dv_0}{dx}=0$	$w_0=0$	$\frac{dv_0}{dx}=0$
	$N_{xx}=0$	$M_{xx}=0$	$N_{xx}=0$	$M_{xx}=0$
simple support	$u_0=0$	$w_0=0$	$u_0=0$	$w_0=0$
	$\frac{dv_0}{dx}=0$	$M_{xx}=0$	$\frac{dv_0}{dx}=0$	$M_{xx}=0$
clamped	$u_0=0$	$v_0=0$	$u_0=0$	$v_0=0$
	$w_0=0$	$\frac{dw_0}{dx}=0$	$w_0=0$	$\phi_x=0$

$$N_{xx} = A_{11}\frac{du_0}{dx} + A_{16}\frac{dv_0}{dx} - B_{11}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - N_{xx}^T$$

$$N_{yy} = A_{12}\frac{du_0}{dx} + A_{26}\frac{dv_0}{dx} - B_{12}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - N_{yy}^T$$

$$N_{xy} = A_{16}\frac{du_0}{dx} + A_{66}\frac{dv_0}{dx} - B_{16}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - N_{xy}^T$$

$$M_{xx} = B_{11}\frac{du_0}{dx} + B_{16}\frac{dv_0}{dx} - D_{11}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - M_{xx}^T$$

$$M_{yy} = B_{12}\frac{du_0}{dx} + B_{26}\frac{dv_0}{dx} - D_{12}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - M_{yy}^T$$

$$M_{xy} = B_{16}\frac{du_0}{dx} + B_{66}\frac{dv_0}{dx} - D_{16}\frac{d^2 w_0}{dx^2} - M_{xy}^T$$

$\Rightarrow$

$$u_0(x) = \frac{B}{AD}\frac{q_0 a^3}{12}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \hat{N}_{xx}^T\, x + a_3$$

$$v_0(x) = \frac{C}{AD}\frac{q_0 a^3}{12}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + b_3$$

$$w_0(x) = \frac{q_0 a^4}{24D}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)\right] + \frac{\hat{M}_{xx}^T a^2}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$w_{max} = \frac{5q_0a^4}{384D} - \frac{\hat{M}^T_{xx}a^2}{8}$$

برای مطالعه بیشتر می‌توان نوشت

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{11}}\left(\frac{D_{11}}{D}\right) = \frac{1}{D_{11}}\left(\frac{D + B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D}\right)$$

همواره مثبت

$\Rightarrow$

$$w_{max} = \frac{5q_0a^4}{384D_{11}}\left(1 + \frac{B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D}\right) - \frac{\hat{M}^T_{xx}a^2}{8}$$

① برای لمینیت متقارن $(B=0)$

(کوچکه)

$$w_{max} = \frac{5q_0a^4}{384D_{11}} - \frac{\hat{M}^T_{xx}a^2}{8}$$

② برای لمینیت پادمتقارن و cross-ply

$(\ )_{16} = (\ )_{26} = 0$

$\bar{B} = B_{11}/A_{11}$, $\bar{C} = 0$, and $D = D_{11} - B_{11}^2/A_{11}$

$$w_{max} = \frac{5q_0a^4}{384D_{11}}\left(1 + \frac{B_{11}^2}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2}\right) - \frac{\hat{M}^T_{xx}a^2}{8}$$

Antisymmetric angle-ply

$A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0,\ \bar{B} = 0,\ \bar{C} = B_{16}/A_{66}$, and $D = D_{11} - B_{16}^2/A_{66}$

$$w_{max} = \frac{5q_0a^4}{384D_{11}}\left(1 + \frac{B_{16}^2}{A_{66}D_{11} - B_{16}^2}\right) - \frac{\hat{M}_{xx}^T a^2}{8}$$

دیده می‌شود وقتی $[B]=0$ باشد معادلات خیز برای تیر و ورق استوانه‌ای یکسان می‌باشد

با این تفاوت که سفتی خمشی این دو با هم فرق دارد:

$$D_{11} = \frac{E_{xx}^b h^3}{12(1 - \nu_{xy}^b \nu_{yx}^b)} = \frac{E_{xx}^b h^3}{12[1 - (\nu_{xy}^b)^2(E_{xx}^b/E_{yy}^b)]}$$

ورق استوانه‌ای

$$E_{xx}^b I_{yy} = E_{xx}^b bh^3/12$$

تیر

6-4-3 Buckling

کافیست در معادلات ورق استوانه‌ای CLPT (6.4-3)، نیروی نرمال فشاری قرار دهیم $\hat{N}_{xx} = -N_{xx}^0$ و ترم اینرسی درون صفحه‌ای یعنی I_0 یا ($\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ و $\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$) را صفر قرار دهیم و حرارت را نیز در نظر نگیریم.

کمانش ورق استوانه‌ای
CLPT

$$A\frac{d^2U}{dx^2} = B\frac{d^3W}{dx^3}$$
$$A\frac{d^2V}{dx^2} = C\frac{d^3W}{dx^3}$$
$$D\frac{d^4W}{dx^4} = -N_{xx}^0\frac{d^2W}{dx^2} \qquad (6.4\text{-}9)$$

فقط از معادله سوم داریم

$$D\frac{d^2W}{dx^2} + N_{xx}^0 W = K_1 x + K_2 \qquad (6.4\text{-}10)$$

که جواب عمومی آن به این صورت است

$$W(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x + c_3 x + c_4 \qquad (6.4\text{-}11)$$

که در آن

$$c_3 = K_1/\lambda^2, c_4 = K_2/\lambda^2 \quad \text{و} \quad \lambda^2 = \frac{N_{xx}^0}{D} \text{ or } N_{xx}^0 = D\lambda^2 \qquad (6.4\text{-}12)$$

مثال:

When the plate strip is simply supported at $x = 0, a$, from Eq. (4.4.15a) we have

$$W = 0, \quad \frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{d^2W}{dx^2} = 0$$

Use of the boundary conditions on W gives $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ and the result

$$\sin \lambda a \equiv \sin(\sqrt{\frac{N_{xx}^0}{D}}) = 0, \quad \text{or} \quad N_{xx}^0 = D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

The critical buckling load N_{cr} is given by $(n = 1)$

$$N_{cr} = D_{11}\frac{\pi^2}{a^2}\left(1 - \frac{B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D_{11}A}\right)$$

Thus the effect of the bending-extensional coupling is to decrease the critical buckling load.

Recall from Section 4.2.3 that when both edges are clamped, λ is determined by solving the equation

$$\lambda a \ \sin \lambda a + 2\cos \lambda a - 2 = 0$$

The smallest root of this equation is $\lambda = 2\pi$, and the critical buckling load becomes

$$N_{cr} = D_{11}\frac{4\pi^2}{a^2}\left(1 - \frac{B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D_{11}A}\right)$$

6.4-4 Vibration

کافی است در معادلات کلی ورق استوانه ای نیروهای درون صفحه ای، مسأله حرارت و بارگذاری عرضی را حذف کنیم.

$$D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \bar{I}_2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \hat{N}_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \qquad (6.4\text{-}13)$$

$$\bar{I}_2 = I_2 - \bar{B}I_1$$

سپس قرار می دهیم

$$w_0(x,t) = W(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \qquad (6.4\text{-}14)$$

$$\Rightarrow \quad D\frac{d^4W}{dx^4} - \hat{N}_{xx}\frac{d^2W}{dx^2} = I_0\omega^2 W - \bar{I}_2\omega^2\frac{d^2W}{dx^2} \qquad (6.4\text{-}15)$$

جواب این معادله:

$$W(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2\cos\lambda x + c_3\sinh\mu x + c_4\cosh\mu x \qquad (6.4\text{-}16)$$

که در آن

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(q + \sqrt{q^2+4pr}\right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(-q + \sqrt{q^2+4pr}\right)} \qquad (6.4\text{-}17)$$

$$p = D, \quad q = \bar{I}_2\omega^2 - \hat{N}_{xx}, \quad r = I_0\omega^2$$

اگر نیروی درون صفحه‌ای نداشته باشیم

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{D}{I_0}\left(1 - \frac{I_2 \lambda^2}{I_0 + I_2 \lambda^2}\right) \qquad (6.4\text{-}18)$$

اگر از اینرسی دورانی نیز صرف‌نظر کنیم داریم:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{I_0}} \qquad (6.4\text{-}19)$$

مثال:

For a simply supported plate strip, λ_n is given by $\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ and from Eq. (4.4.42) it follows that

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{I_0}} \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{n\pi}{a})^2(\bar{I}_2/I_0)}} \tag{4.4.44}$$

Note that the rotary inertia has the effect of decreasing the natural frequency. When the rotary inertia is zero, we have

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{I_0}} \tag{4.4.45}$$

For a plate strip clamped at both ends, λ must be determined from [see Eqs. (4.2.56)–(4.2.60)]

$$-2 + 2\cos\lambda a \cosh\mu a + \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{\lambda}\right)\sin\lambda a \sinh\mu a = 0 \tag{4.4.46}$$

For natural vibration without rotary inertia, Eq. (4.4.46) takes the simpler form

$$\cos\lambda a \cosh\lambda a - 1 = 0 \tag{4.4.47}$$

The roots of Eq. (4.4.47) are

$$\lambda_1 a = 4.730, \quad \lambda_2 a = 7.853, \quad \lambda_3 a = 10.996, \quad \cdots, \quad \lambda_n a \approx (n + \frac{1}{2})\pi \tag{4.4.48}$$

6.5 Cylindrical Bending Using FSDT

6.5-1 Governing Equations

برای یافتن معادلات حاکم ورق استوانه ای FSDT ، کافیست در معادلات کلی با پارامترهای $\frac{\partial}{\partial y}$ را صفر قرار دهیم:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial N_{xx}^T}{\partial x} = I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad a$$

$$A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial x} = I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad b$$

معادلات کلی ورق استوانه ای FSDT

$$B_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{16}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) - KA_{45}\phi_y - \frac{\partial M_{xx}^T}{\partial x} = I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad c$$

(6.5-1)

$$B_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KA_{44}\phi_y - KA_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) - \frac{\partial M_{xy}^T}{\partial x} = I_2\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad d$$

$$KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) + KA_{45}\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + q = I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad e$$

با فرض $\phi_y = 0$ و صرف‌نظر کردن از اینرسی‌های درون صفحه‌ای ($I_0 = 0$ یا $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0$) همچنین در غیاب اثرات حرارتی داریم:

$$
\begin{aligned}
A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}&=I_1\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\\
A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+B_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}&=0\\
B_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+B_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}-KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)&=I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\\
KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+q&=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (6.5\text{-}2)
$$

معادلات حاکم ورق استوانه‌ای FSDT

با حذف u_0 و v_0 از چهار معادله فوق داریم:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right)+\hat{N}_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+q&=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\\
D\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}-KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)&=I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned}
}
\qquad (6.5\text{-}3)
$$

6.5-2 Bending

6.5-3 =>

$$KA_{55}\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{d\phi_x}{dx}\right)+q=0$$
$$D\frac{d^2\phi_x}{dx^2}-KA_{55}\left(\frac{dw_0}{dx}+\phi_x\right)=0$$

خمش ورق استوانه‌ای (6.5-4)
FSDT

حل عمومی این معادلات چنین خواهد بود

$$\phi_x(x)=\frac{1}{D}\left[-\int_0^x\int_0^\xi\int_0^\eta q(\zeta)\ d\zeta d\eta d\xi+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3\right] \tag{6.5-5}$$

$$w_0(x)=-\frac{1}{D}\left[-\int_0^x\int_0^\xi\int_0^\eta\int_0^\mu q(\zeta)\ d\zeta d\mu d\eta d\xi+c_1\frac{x^3}{6}+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$
$$+\frac{1}{KA_{55}}\left[-\int_0^x\int_0^\xi q(\zeta)d\zeta d\xi+c_1x\right] \tag{6.5-6}$$

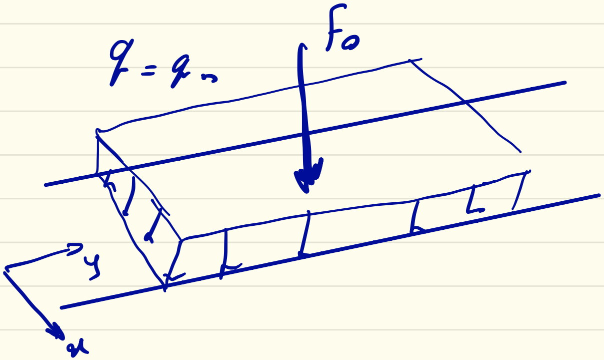
مثال: ورق استوانه‌ای با دو لبه تکیه‌گاه ساده . بارگذاری $q = q_0$ ثابت ، و بار نقطه‌ای $F = F_0$ در مرکز ورق

$$\phi_x(x) = -\frac{q_0 a^3}{24D}\left[4\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right] + \frac{F_0 a^2}{16D}\left[1 - 4\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

$$w_0(x) = \frac{q_0 a^4}{24D}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)\right] + \frac{q_0 a^2}{2KA_{55}}\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{F_0 a^3}{48D}\left[3\left(\frac{x}{a}\right) - 4\left(\frac{x}{a}\right)^3\right] + \frac{F_0 a}{2KA_{55}}\left(\frac{x}{a}\right)$$

The maximum deflection occurs at $x = a/2$ and it is given by

$$w_{max} = \left(\frac{5q_0 a^4}{384D} + \frac{q_0 a^2}{8KA_{55}} + \frac{F_0 a^3}{48D} + \frac{F_0 a}{4KA_{55}}\right)$$



مثال: ورق استوانه‌ای با دو تکیه‌گاه گیردار و همان شرایط بارگذاری $F=F_0$ و $q=q_0$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{A}$$

$$K = \frac{U^c}{U^{FSDT}}$$

$$\phi_x(x) = -\frac{q_0 a^3}{12D}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)\right] - \frac{F_0 a^2}{8D}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$w_0(x) = \frac{q_0 a^4}{24D}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 + \frac{q_0 a^2}{2KA_{55}}\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \frac{F_0 a^3}{48D}\left[3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{a}\right)^3\right] + \frac{F_0 a}{2KA_{55}}\left(\frac{x}{a}\right)$$

The maximum deflection is given by

$$w_{max} = \left(\frac{q_0 a^4}{384D} + \frac{q_0 a^2}{8KA_{55}} + \frac{F_0 a^3}{192D} + \frac{F_0 a}{4KA_{55}}\right)$$

تعیین K (ضریب اصلاح برشی)، هنوز مساله‌ای است که حل نشده است. در مقالات برای شرایط مختلف K را تعیین کرده‌اند. بیشتر اوقات $K=5/6$ برای ورق ایزوتروپ و همگن درنظر گرفته می‌شود.

درکل K به لایه‌چینی، هندسه و جنس ماده بستگی دارد.

6.5-3 Buckling

با قرار دادن $q = 0\ ,\ \hat{N}_{xx} = -N^0_{xx}$, and $I_0 = I_2 = 0$ در معادله (6.5-3) معادلات حاکم کمانش بدست می‌آید

$$K A_{55}\left(\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d\mathcal{X}}{dx}\right) + \hat{N}_{xx}\frac{d^2W}{dx^2} = 0$$

$$D\frac{d^2\mathcal{X}}{dx^2} - K A_{55}\left(\frac{dW}{dx} + \mathcal{X}\right) = 0 \qquad (6.5\text{-}7)$$

کمانش ورق استوانه ای
FSDT

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{X}}{dx} = -\left(1 - \frac{N^0_{xx}}{K A_{55}}\right)\frac{d^2W}{dx^2} \qquad (6.5\text{-}8)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{X}(x) = -\left(1 - \frac{N^0_{xx}}{K A_{55}}\right)\frac{dW}{dx} + K_1 \qquad (6.5\text{-}9)$$

$$\Rightarrow \quad D\left(1 - \frac{N^0_{xx}}{K A_{55}}\right)\frac{d^4W}{dx^4} + N^0_{xx}\frac{d^2W}{dx^2} = 0 \qquad (6.5\text{-}10)$$

جواب معادله فوق

$$W(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x + c_3 x + c_4 \qquad (6.5\text{-}11)$$

$$\lambda^2 = \frac{N_{xx}^0}{\left(1 - \frac{N_{xx}^0}{KA_{55}}\right) D} \quad \text{or} \quad N_{xx}^0 = \frac{\lambda^2 D}{\left(1 + \frac{\lambda^2 D}{KA_{55}}\right)} \qquad (6.5\text{-}12)$$

مثال: ورق استوانه‌ای با دو تکیه‌گاه ساده

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 D \left[1 - \frac{D\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{KA_{55} + D\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\right]$$

دیده می‌شود که در تئوری FSDT با درنظر گرفتن اثر تغییرشکل برشی کاهش نیروی بحرانی کمانش را داریم.
به عبارت دیگر در تئوری کلاسیک ورق سفتی بیشتری نسبت به واقعیت دارد (FSDT).

مثال: ورق استوانه‌ای با دو تکیه‌گاه گیردار

$$2\left(\cos\lambda a - 1\right)\left(1 + \frac{\lambda^2 D}{KA_{55}}\right) + \lambda a \, \sin\lambda a = 0$$

$$N_{cr} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 D \left[1 - \frac{D\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}{KA_{55} + D\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\right]$$

دیده می‌شود که در شرایط $\frac{a}{h} \leqslant 10$ برای تکیه‌گاه ساده و $\frac{a}{h} \leqslant 20$ برای تکیه‌گاه گیردار
اثر تغییرشکل برشی قابل ملاحظه می‌شود.

6.5-4 vibration

برای بررسی ارتعاشات ورق استوانه‌ای کامنیت درنظر بگیریم:

$$w_0(x,t) = W(x)e^{i\omega t}, \quad \phi_x(x,t) = \mathcal{X}(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}$$

که ω فرکانس طبیعی و $W(x)$, $\mathcal{X}(x)$ شکل مدهای ارتعاشات هستند.

$$D\frac{d^2\mathcal{X}}{dx^2} - KA_{55}\left(\frac{dW}{dx} + \mathcal{X}\right) + I_2\omega^2\mathcal{X} = 0$$
$$KA_{55}\left(\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d\mathcal{X}}{dx}\right) + I_0\omega^2 W = 0 \qquad (6.5\text{-}13)$$

$$\Rightarrow \quad p\frac{d^4W}{dx^4} + q\frac{d^2W}{dx^2} - rW = 0 \qquad (6.5\text{-}14)$$

که در آن

$$p = D, \quad q = \frac{I_0 D}{KA_{55}}\omega^2, \quad r = I_0\omega^2 \qquad (6.5\text{-}15)$$

جواب این معادله چنین است

$$W(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x + c_3 \sinh\mu x + c_4 \cosh\mu x \qquad (6.5\text{-}16)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(q + \sqrt{q^2 + 4pr}\right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(-q + \sqrt{q^2 + 4pr}\right)} \qquad (6.5\text{-}17)$$

با کمی مرتب سازی داریم

$$(\omega^2)_1 = \frac{1}{2P}\left(Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}\right), \quad (\omega^2)_2 = \frac{1}{2P}\left(Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}\right) \qquad (6.5\text{-}18)$$

که در آن

$$P = \frac{I_2}{KA_{55}}, \quad Q = \left[1 + \left(\frac{D}{KA_{55}} + \frac{I_2}{I_0}\right)\lambda^2\right], \quad R = \left(\frac{D}{I_0}\right)\lambda^4 \qquad (6.5\text{-}19)$$

اگر اینرسی دورانی صرفنظر شود ($P = 0$) داریم:

$$\omega^2 = \frac{\bar{Q}}{R}, \quad \bar{Q} = \left[1 + \left(\frac{D}{KA_{55}}\right)\lambda^2\right], \quad R = \left(\frac{D}{I_0}\right)\lambda^4 \qquad (6.5\text{-}20)$$

مثال: ورق استوانه‌ای با دو تکیه‌گاه ساده

and $c_2 = c_3 = c_4 = 0$

$$\sin \lambda a = 0, \quad \text{or} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

با قرار دادن λ_n در (6.5-18) فرکانس طبیعی بدست می‌آید.

اگر اینرسی دورانی قابل صرفنظر باشد:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{I_0}} \sqrt{\frac{KA_{55}}{KA_{55} + (\frac{n\pi}{a})^2 D}}$$

اگر بخواهیم اثر تغییرشکل برشی را صرفنظر کنیم کافیست $A_{55} = G_{13} = \infty$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{I_0}}$$

که همان فرکانس طبیعی CLPT است.

دیده می‌شود که با درنظرگرفتن اثر تغییرشکل برشی، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.