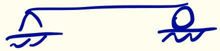
بسم الله الرحمن الرحیم

مواد مرکب

جلسه ۲۷

7-4 The Navier Solutions



روش نویر برای ورق TSDT چارطرف تکیه‌گاه ساده و لایه‌چینی Antisymmetric امکان‌پذیر است.

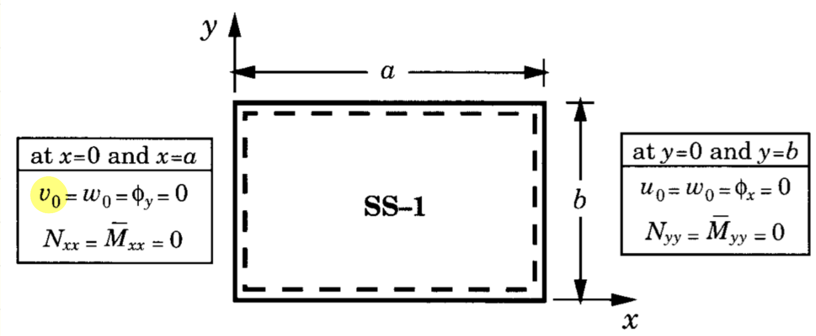
برای ورق Antisymmetric cross-ply داریم:

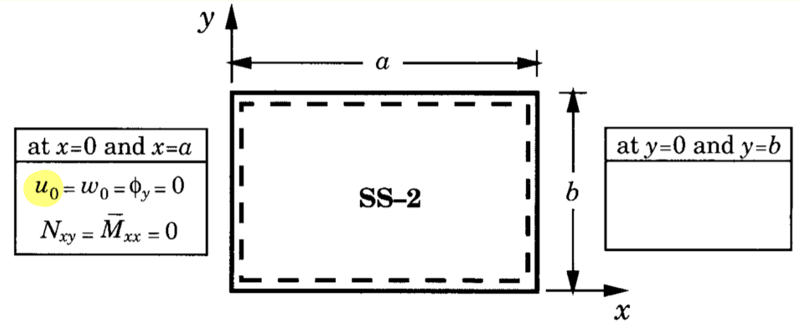
$$\begin{aligned} &A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = I_1 = 0 \\ &E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = I_3 = I_5 = I_7 = 0 \end{aligned} \tag{7.4-1}$$

و برای ورق Antisymmetric angle-ply داریم:

$$\begin{aligned} &A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = I_1 = 0 \\ &E_{11} = E_{12} = E_{22} = E_{66} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = I_3 = I_5 = I_7 = 0 \end{aligned} \tag{7.4-2}$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در این حل می‌تواند دو حالت SS-1 و SS-2 باشد.





7.4-1 Antisymmetric Cross-Ply Laminates (SS-1)

با فرض های زیر شرایط مرزی کامل ارضا می شوند:

$$u_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\cos\alpha x \sin\beta y$$

$$v_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\sin\alpha x \cos\beta y$$

$$w_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha x \sin\beta y \qquad (7.4\text{-}3)$$

$$\phi_x(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\alpha x \sin\beta y$$

$$\phi_y(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\sin\alpha x \cos\beta y$$

$$q(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t)\,\sin \alpha x\,\sin \beta y \qquad (7.4\text{-}4)$$

$$Q_{mn}(t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y,t)\,\sin \alpha x\,\sin \beta y\;dxdy \qquad (7.4\text{-}5)$$

با جایگذاری در معادلات حاکم TSDT (معادلات حرکت) به معادله ماتریسی زیر می‌توان رسید:

$$[\hat{S}]\{\Delta\} + [\underbrace{\hat{M}}_{\text{mass}}]\{\ddot{\Delta}\} = \{F\} \qquad (7.4\text{-}6)$$

که در آن

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha N^1_{mn} \\ \beta N^2_{mn} \\ 0 \\ \alpha \hat{M}^1_{mn} \\ \beta \hat{M}^2_{mn} \end{Bmatrix} \qquad (7.4\text{-}7)$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad \hat{s}_{12} = (A_{12}+A_{66})\alpha\beta \\
\hat{s}_{13} &= -c_1\left[E_{11}\alpha^2 + (E_{12}+2E_{66})\beta^2\right]\alpha \\
\hat{s}_{14} &= \hat{B}_{11}\alpha^2 + \hat{B}_{66}\beta^2, \quad \hat{s}_{15} = (\hat{B}_{12}+\hat{B}_{66})\alpha\beta \\
\hat{s}_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad \hat{s}_{24} = \hat{s}_{15} \\
\hat{s}_{23} &= -c_1\left[E_{22}\beta^2 + (E_{12}+2E_{66})\alpha^2\right]\beta, \quad \hat{s}_{25} = \hat{B}_{66}\alpha^2 + \hat{B}_{22}\beta^2 \\
\hat{s}_{33} &= \bar{A}_{55}\alpha^2 + \bar{A}_{44}\beta^2 + c_1^2\left[H_{11}\alpha^4 + 2(H_{12}+2H_{66})\alpha^2\beta^2 + H_{22}\beta^4\right]
\end{aligned} \qquad (7.4\text{-}8)$$

$$\hat{s}_{34} = \bar{A}_{55}\alpha - c_1\left[\hat{F}_{11}\alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha\beta^2\right]$$
$$\hat{s}_{35} = \bar{A}_{44}\beta - c_1\left[\hat{F}_{22}\beta^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha^2\beta\right]$$
$$\hat{s}_{44} = \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11}\alpha^2 + \bar{D}_{66}\beta^2, \quad \hat{s}_{45} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\alpha\beta$$
$$\hat{s}_{55} = \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66}\alpha^2 + \bar{D}_{22}\beta^2, \quad \tilde{s}_{33} = \hat{N}_{xx}\alpha^2 + \hat{N}_{yy}\beta^2$$
$$\hat{m}_{11} = I_0, \quad \hat{m}_{22} = I_0, \quad \hat{m}_{33} = I_0 + c_1^2 I_6\left(\alpha^2 + \beta^2\right), \quad \hat{m}_{34} = -c_1 J_4\alpha$$
$$\hat{m}_{35} = -c_1 J_4\beta, \quad \hat{m}_{44} = K_2, \quad \hat{m}_{55} = K_2$$
$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_1 D_{ij}, \quad \hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij}, \quad \hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \ (i,j = 1,2,6)$$
$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij}, \quad \bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_1\hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij} \ (i,j = 1,2,6)$$
$$\bar{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1\hat{F}_{ij} = D_{ij} - 2c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij} \ (i,j = 1,2,6)$$
$$\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2\hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij} \ (i,j = 4,5)$$
$$J_i = I_i - c_1 I_{i+2}, \quad K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6, \quad c_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = 3c_1$$

ترم‌های حرارت نیز چنین خواهند بود

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} N_{mn}^1(t) \\ N_{mn}^2(t) \\ N_{mn}^6(t) \end{Bmatrix} \sin\alpha x \, \sin\beta y$$
$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} M_{mn}^1(t) \\ M_{mn}^2(t) \\ M_{mn}^6(t) \end{Bmatrix} \sin\alpha x \, \sin\beta y$$
$$\begin{Bmatrix} P_{xx}^T \\ P_{yy}^T \\ P_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} P_{mn}^1(t) \\ P_{mn}^2(t) \\ P_{mn}^6(t) \end{Bmatrix} \sin\alpha x \, \sin\beta y$$

(7.4-9)

$$\{N^{T}_{mn}(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)}\ T_{mn}(z,t)\ dz$$

$$\{M^{T}_{mn}(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)}\ T_{mn}(z,t)\ z\ dz \qquad (7.4\text{-}10)$$

$$\{P^{T}_{mn}(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\alpha}\}^{(k)}\ T_{mn}(z,t)\ z^3\ dz$$

$$\Delta T(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(T^0_{mn} + zT^1_{mn}\right) \sin \alpha x\ \sin \beta y$$

$$\left(T^0_{mn}, T^1_{mn}\right) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b (T_0, T_1) \sin \alpha x\ \sin \beta y\ dxdy$$

$$\{\hat{M}_{mn}\} = \{M_{mn}\} - c_1\{P_{mn}\}$$

معادله ماتریسی (7.4-6) با روش‌های عددی مانند نیومارک قابل حل است. بعد از یافتن توزیع جابجایی‌ها
می‌توان تنش‌ها و کرنش‌ها را یافت.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \Delta T \right) \qquad (7.4\text{-}11)$$

که در آن

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} (R_{mn}^{xx} + z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin \alpha x \, \sin \beta y \\ (R_{mn}^{yy} + z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin \alpha x \, \sin \beta y \\ (R_{mn}^{xy} + z S_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy}) \cos \alpha x \cos \beta y \end{Bmatrix} \quad (7.4\text{-}12)
$$

$$
\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} T_{mn}^{xx} \\ T_{mn}^{yy} \\ T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2\alpha\beta W_{mn}) \end{Bmatrix}
$$

تنش‌های برشی نیز قابل محاسبه هستند:

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \right)
$$

$$
= (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \, \cos \beta y \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \, \sin \beta y \end{Bmatrix}
$$

(7.4-13)

7.4-2 Antisymmetric Angle-Ply Laminates (SS-2)

برای ارضای شرایط مرزی کافیست در نظر بگیریم:

$$u_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\sin\alpha x\cos\beta y$$
$$v_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\cos\alpha x\sin\beta y \qquad (7.4\text{-}14)$$

سایر جابجائی ها (w_0 و ϕ_x و ϕ_y) مانند قسمت قبل (7.4-3) می باشند.

با جایگذاری در معادلات حاکم به معادله ماتریسی خواهیم رسید:

$$[\hat{S}]\{\Delta\} + [\hat{M}]\{\ddot{\Delta}\} = \{F\} \qquad (7.4\text{-}15)$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
&\hat{s}_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad \hat{s}_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
&\hat{s}_{13} = -c_1\left(3E_{16}\alpha^2 + E_{26}\beta^2\right)\beta \\
&\hat{s}_{14} = 2\hat{B}_{16}\alpha\beta, \quad \hat{s}_{15} = \hat{B}_{16}\alpha^2 + \hat{B}_{26}\beta^2 \\
&\hat{s}_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad \hat{s}_{23} = -c_1\left(E_{16}\alpha^2 + 3E_{26}\beta^2\right)\alpha \\
&\hat{s}_{24} = \hat{s}_{15}, \quad \hat{s}_{25} = 2\hat{B}_{26}\alpha\beta \\
&\hat{s}_{33} = \bar{A}_{55}\alpha^2 + \bar{A}_{44}\beta^2 + c_1^2\left[H_{11}\alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66})\alpha^2\beta^2 + H_{22}\beta^4\right] \\
&\hat{s}_{34} = \bar{A}_{55}\alpha - c_1\left[\hat{F}_{11}\alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha\beta^2\right] \\
&\hat{s}_{35} = \bar{A}_{44}\beta - c_1\left[\hat{F}_{22}\beta^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha^2\beta\right] \\
&\hat{s}_{44} = \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11}\alpha^2 + \bar{D}_{66}\beta^2, \quad \hat{s}_{45} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\alpha\beta \\
&\hat{s}_{55} = \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66}\alpha^2 + \bar{D}_{22}\beta^2
\end{aligned}
\qquad (7.4\text{-}16)
$$

سایر پارامترها مانند بخش قبل می‌باشند.

Chapter VIII — Layerwise Theory and Variable Kinematic Models

8.1 Introduction

آنچه تا به حال انجام دادیم چنین بود که یک معادله فضای حالت و یک معادله (معادلات) حاکم برای کل لمینیت در نظر گرفتیم. به چنین روش های حلی روش های

Equivalent Single-layer Laminate theory (ESL theories)

گفته می شود.

روش های ESL اغلب نمی توانند به درستی تنش های سه بعدی را محاسبه کنند. بنابراین باید از روش الاستیسیته یا روش لیروایز استفاده کرد که معادلات سینماتیک و همچنین معادلات فضای حالت را بصورت کامل در نظر می گیرند.

در روش لیروایز تعادل نیروی برشی در بین لایه ها برقرار است. لذا کرنش های برشی در بین لایه ها ناپیوسته هستند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k+1)}, \quad \begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}^{(k+1)}$$

در مرز لایه‌ها (8.1-1)

اما چون ماتریس سفتی لایه k و k+1 ($\bar{Q}^{k+1}$ و $\bar{Q}^{k}$) باهم برابر نیستند لذا داریم:

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\\ \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\\ \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix}^{(k+1)} \qquad (8.1\text{-}2)$$

این درحالی است که در تئوری های ESL تنش های عرضی در سطح لایه‌ها ناپیوسته بدست می‌آمدند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}^{(k)}_{ESL} \neq \begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}^{(k+1)}_{ESL}$$

در ESL (8.1-3)

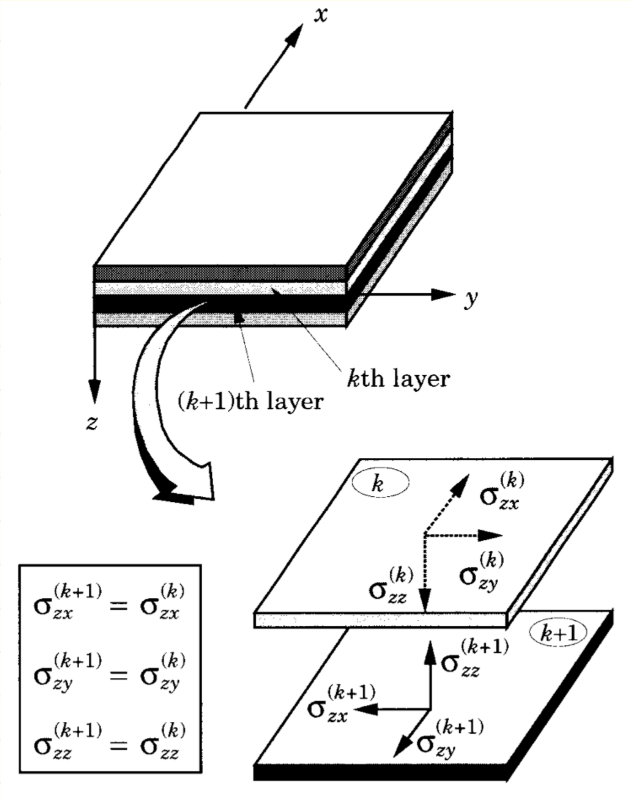
8.2 An Overview of Layerwise Theories

جابجایی‌ها در این تئوری در راستای ضخامت فقط پیوستگی درجه اول دارند:

(C^0-Continuity). بنابراین خود جابجایی‌ها پیوسته هستند ولی مشتقات آنها

لزوما پیوسته نیستند. این موضوع اجازه می‌دهد که بتوان عدم پیوستگی بین لایه‌ای

را مدل کرد. همچنین تئوری لیروایز معادلات سینماتیکی و اعوجاج سطح مقطع را به خوبی مدل می کند.



تئوری لیروایز را می توان به دو روش تقسیم کرد

1) Partial Layerwise Theory

دارای روش فقط جابجایی های درون صفحه ای (لایه)

را با روش لیروایز حل می کنند.

2) Full Layerwise Theory

همه جابجایی ها را با روش لیروایز حل می کنند.

میزان نزدیک بودن به واقعیت را در بین روش های مختلف می توان چنین رتبه بندی کرد

More realistic

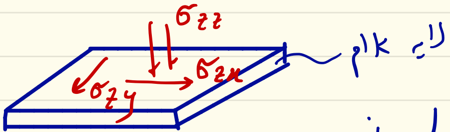
1- Full Layer wise

2- partial Layerwise

3- ESL Theories

برای لمینیت های ضخیم تئوری لیروایز جزئی جواب های قابل قبولی ارائه می دهد.

برای مدل سازی در روش لیروایز روش های مختلفی برای مدل سازی وجود دارد:



I- مدل اول

در این روش برای هر لایه معادلات تعادل را می نویسیم

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}^{(k)}}{\partial x_\beta} + \sigma_{\alpha 3}^{(k+1)} - \sigma_{\alpha 3}^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial Q_\alpha^{(k)}}{\partial x_\alpha} + \sigma_{33}^{(k+1)} - \sigma_{33}^{(k)} = 0$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}^{(k)}}{\partial x_\beta} + \sigma_{\alpha 3}^{(k+1)} z_{k+1} - \sigma_{\alpha 3}^{(k)} z_k - Q_\alpha^k = 0 \qquad (8.2-1)$$

II مدل دوم

تعداد زیادی ایده برای مدل سازی جابجایی‌ها بیان شده است:

$$u_\alpha(x_\beta, x_3, t) = u^0_\alpha(x_\beta, t) - x_3 u^0_{3,\alpha}(x_\beta, t) + f_{\alpha\gamma}(x_3)\phi_\gamma(x_\beta, t)$$
$$u_3(x_\beta, x_3, t) = u^0_3(x_\beta, t) \qquad (8.2-2)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$

که ϕ_γ و $f_{\alpha\gamma}$ توابع پیوسته درین لایه‌ها هستند.

III مدل سوم (مدل ردی)

در این روش، مسأله تبدیل به حل یک مسأله یک بعدی در جهت ضخامت می‌شود

که با اجزاء محدود حل می‌شود.

8.3 The Layerwise Theory of Reddy

در این روش در هر لایه جابجایی‌ها جینی در نظر گرفته می‌شوند.

$$u^k(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{m} u_j^k(x,y,t)\phi_j^k(z)$$

$$v^k(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{m} v_j^k(x,y,t)\phi_j^k(z) \qquad (8.3\text{-}1)$$

$$w^k(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} w_j^k(x,y,t)\psi_j^k(z)$$

k : شماره لایه