بسم الله الرحمن الرحیم

مواد مرکب

جلسه ۲۳

6-2-4 Vibration

برای یافتن ارتعاشات آزاد جسم کافی است در معادله حرکت،
خیز را متناوب در نظر بگیریم:

$$w_0(x,t) = W(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{6.2-28}$$

معادله حاکم بر تیر در غیاب بار عرضی چنین می شود:

$$E^b_{xx} I_{yy} \frac{d^4W}{dx^4} - b\hat{N}_{xx}\frac{d^2W}{dx^2} = \omega^2 \hat{I}_0 W - \omega^2 \hat{I}_2 \frac{d^2W}{dx^2} \tag{6.2-29}$$

این معادله به شکل کلی زیر قابل بازنویسی است:

$$p\frac{d^4W}{dx^4} + q\frac{d^2W}{dx^2} - rW = 0 \tag{6.2-30}$$

$$p = E^b_{xx} I_{yy}, \quad q = \omega^2 \hat{I}_2 - b\hat{N}_{xx}, \quad r = \omega^2 \hat{I}_0 \tag{6.2-31}$$

حل عمومی برای معادله (6.2-30) چنین خواهد بود

ارتعاش
تیر CLPT

$$\boxed{W(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x + c_3 \sinh\mu x + c_4 \cosh\mu x} \tag{6.2-32a}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(q + \sqrt{q^2 + 4pr}\right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(-q + \sqrt{q^2 + 4pr}\right)} \tag{6.2-32b}$$

مقادیر $c_1 - c_4$ با استفاده از شرایط مرزی باید محاسبه شوند.

$(6.2\text{-}32b) \Rightarrow$

$$\left(2p\lambda^2 - q\right)^2 = q^2 + 4pr \quad \text{or} \quad p\lambda^4 - q\lambda^2 - r = 0 \qquad (6.2\text{-}33a)$$

$$\left(2p\mu^2 + q\right)^2 = q^2 + 4pr \quad \text{or} \quad p\mu^4 + q\mu^2 - r = 0 \qquad (6.2\text{-}33b)$$

با قرار دادن مقادیر (6.2-31) و حل کردن برای ω داریم:

$$\omega^2 = \lambda^4 \left(\frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\hat{I}_0}\right) \left(\frac{1+P_1}{1+R_1}\right), \quad P_1 = \frac{b\hat{N}_{xx}}{E^b_{xx} I_{yy} \lambda^2}, \quad R_1 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0}\lambda^2 \qquad (6.2\text{-}34a)$$

$$\omega^2 = \mu^4 \left(\frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\hat{I}_0}\right) \left(\frac{1-P_2}{1-R_2}\right), \quad P_2 = \frac{b\hat{N}_{xx}}{E^b_{xx} I_{yy} \mu^2}, \quad R_2 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0}\mu^2 \qquad (6.2\text{-}34b)$$

هردو رابطه فوق یک مقدار برای فرکانس ω می دهد.

اگر بار محوری $\hat{N}_{xx}$ نداشته باشیم:

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\hat{I}_0} \left(1 - \frac{\hat{I}_2 \lambda^2}{\hat{I}_0 + \hat{I}_2 \lambda^2}\right) = \mu^4 \frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\hat{I}_0} \left(1 + \frac{\hat{I}_2 \mu^2}{\hat{I}_0 - \hat{I}_2 \mu^2}\right) \qquad (6.2\text{-}35)$$

از قسمت اول معادله فوق می‌توان نتیجه گرفت که اینرسی دورانی $\hat{I}_2$ فرکانس طبیعی

تیر را کاهش می دهد. اگر از انرژی دورانی صرف‌نظر کنیم (λ = ۳ می شود)

$$\omega = \lambda^2 a_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\hat{I}_0}} \qquad (6.2\text{-}36)$$

مثال: تیر دو سر مفصل

$$W(0)=0,\quad W(a)=0,\quad \frac{d^2W}{dx^2}(0)=0,\quad \frac{d^2W}{dx^2}(a)=0$$

$\Rightarrow$

$$c_2=c_3=c_4=0$$

$$c_1 \sin\lambda a = 0,\ \text{which implies}\quad \lambda=\frac{n\pi}{a}$$

(6.2-34) $\Rightarrow$

$$\omega_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 a_0\sqrt{1+\frac{b\hat{N}_{xx}}{(\frac{n\pi}{a})^2E^b_{xx}I_{yy}}}\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{n\pi}{a})^2\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0}}}$$

if $\hat{I}_2=0$ $\Rightarrow$

اینرسی دورانی

$$\omega_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 a_0\sqrt{1+\frac{b\hat{N}_{xx}}{(\frac{n\pi}{a})^2E^b_{xx}I_{yy}}}$$

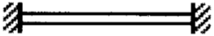
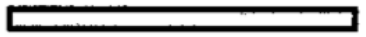
دیده می شود که نیروی محوری فرکانس طبیعی را افزایش می دهد.

اگر تیر ما خیلی انعطاف پذیر باشد (مانند کابل) جمله دوم زیر رادیکال خیلی بزرگتر از یک می شود پس

$$\omega_n\approx\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{\hat{N}_{xx}}{\hat{I}_0}}$$

کابل

Table 4.2.3: Values of the constants and eigenvalues for natural vibration of laminated composite beams with various boundary conditions ($\lambda_n^4 \equiv \omega_n^2 I_0 / E_{xx}^b I_{yy} = (e_n/a)^4$). The classical laminate theory *without* rotary inertia is used.

End conditions at $x = 0$ and $x = a$	Constants[†]	Characteristic equation and values of $e_n \equiv \lambda_n a$
• Hinged-Hinged 	$c_1 \neq 0,\ c_2 = c_3 = c_4 = 0$	$\sin e_n = 0$ $e_n = n\pi$
• Fixed-Fixed 	$c_1 = -c_3 = 1/(\sin e_n - \sinh e_n)$ $-c_2 = c_4 = 1/(\cos e_n - \cosh e_n)$	$\cos e_n \cosh e_n - 1 = 0$ $e_n = 4.730, 7.853, \cdots$
• Fixed-Free 	$c_1 = -c_3 = 1/(\sin e_n + \sinh e_n)$ $-c_2 = c_4 = 1/(\cos e_n + \cosh e_n)$	$\cos e_n \cosh e_n + 1 = 0$ $e_n = 1.875, 4.694, \cdots$
• Free-Free 	$c_1 = c_3 = 1/(\sin e_n - \sinh e_n)$ $c_2 = c_4 = -1/(\cos e_n - \cosh e_n)$	$\cos e_n \cosh e_n - 1 = 0$ $e_n = 4.730, 7.853, \cdots$
• Hinged-Fixed 	$c_1 = 1/\sin e_n,\ c_3 = 1/\sinh e_n$ $c_2 = c_4 = 0$	$\tan e_n = \tanh e_n$ $e_n = 3.927, 7.069, \cdots$
• Hinged-Free 	$c_1 = 1/\sin e_n,\ c_3 = -1/\sinh e_n$ $c_2 = c_4 = 0$	$\tan e_n = \tanh e_n$ $e_n = 3.927, 7.069, \cdots$

[†] See Eq. (4.2.46a): $W(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sinh \mu x + c_4 \cosh \mu x$.

Table 4.2.4: Maximum transverse deflections, critical buckling loads, and fundamental frequencies of laminated beams according to the classical beam theory ($E_1/E_2 = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$).

مثال عددی برای
لمینیت

Laminate	Hinged-Hinged			Clamped-Clamped			Clamped-Free		
	$\bar{w}$	$\bar{N}$	$\bar{\omega}$	$\bar{w}$	$\bar{N}$	$\bar{\omega}$	$\bar{w}$	$\bar{N}$	$\bar{\omega}$
0	1.000 0.625	20.562	14.246 14.245 14.187	0.250 0.125	82.247	32.292 32.291 32.129	16.000 6.000	5.140	5.074 5.074 5.071
90	25.000 15.625	0.822	2.849	6.250 3.125	3.290	6.458	400.00 150.00	0.205	1.015
$(0/90)_s$	1.134 0.709	18.127	13.375	0.283 0.142	72.507	30.320	18.149 6.806	4.532	4.764
$(90/0)_s$	6.239 3.899	3.296	5.703	1.560 0.780	13.183	12.929	99.821 37.433	0.824	2.032
$(45/-45)_s$	14.308 8.942	1.437	3.766	3.577 1.788	5.748	8.537	228.93 85.847	0.359	1.341
Laminate A	1.607 1.005	12.790	11.236	0.402 0.201	51.162	25.469	25.721 9.645	3.197	4.002
Laminate B	2.801 1.751	7.341	8.512	0.700 0.350	29.366	19.296	44.813 16.805	1.835	3.032
Laminate C	7.945 4.966	2.588	5.054	1.986 0.993	10.351	11.456	127.13 47.673	0.647	1.800

Laminate $A = (0/\pm45/90)_s$, Laminate $B = (45/0/-45/90)_s$, Laminate $C = (90/\pm45/0)_s$.

6-3 Analysis of Laminated Beams Using FSDT

6-3-1 Governing Equations

تیر FSDT با عنوان تیر تیموشینکو شناخته می‌شود.

برای لمینیت متقارن $(B=0)$ در غیاب نیروهای درون صفحه‌ای داریم:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (6.3\text{-}1)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \qquad (6.3\text{-}2)$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = [D^*] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (6.3\text{-}3)$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} A^*_{44} & A^*_{45} \\ A^*_{45} & A^*_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} \qquad (6.3\text{-}4)$$

K همان ضریب اصلاح نیروی برشی است.

مانند قسمت قبل برای تیر بلند و بدون اثر پواسون در نظر میگیریم $M_y = M_{xy} = Q_y = \phi_y = 0$

پس

$$w_0 = w_0(x,t) \;,\quad \phi_x = \phi_x(x,t) \qquad (6.3\text{-}5)$$

$$\Rightarrow \; u(x,z) = z\,\phi_x(x,t) \;,\quad w(x,z) = w_0(x) \qquad (6.3\text{-}6)$$

$$\Rightarrow \; \varepsilon_x = z\,\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \;,\quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \qquad (6.3\text{-}7)$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = D^*_{11} M_x \;,\quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x = \frac{A^*_{55}}{k} Q_x \qquad (6.3\text{-}8)$$

یا

$$E_x^b I_y \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = M(x) \quad , \quad M(x) = b M_x \quad , \quad E_x^b = \frac{12}{D_{11}^* h^3} \qquad (6.3\text{-}9a)$$

$$k G_{xz}^b bh\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) = Q(x) \quad , \quad Q(x) = b Q_x \quad , \quad G_{xz}^b = \frac{1}{A_{55}^* h} \qquad (6.3\text{-}9b)$$

توجه: اگر در مسئله‌ای ممان خمشی ($M(x)$) و یا نیروی برشی ($Q(x)$) معلوم بود از روابط (6.3-9) برای حل مسئله (یعنی یافتن w_0 و ϕ_x) می‌توان استفاده کرد.

با استفاده از معادلات کلی حاکم بر تئوری FSDT (5.2-17) می‌توان برای تیر نوشت

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \hat{N}_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad (6.3\text{-}10a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \qquad (6.3\text{-}10b)$$

با جایگذاری از (6.3-9) در روابط فوق می‌توان نوشت:

$$
\boxed{\begin{aligned}
KG_{xz}^b bh\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right)+b\hat{N}_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\hat{q}&=\hat{I}_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
E_{xx}^b I_{yy}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}-KG_{xz}^b bh\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)&=\hat{I}_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned}}
$$

(6.3-11a)

معادلات تیر FSDT

(6.3-11b)

که در آن

$$\hat{q}=bq,\quad \hat{I}_0=bI_0,\quad \hat{I}_2=bI_2$$ (6.3-11c)

$I_0 = \rho\int z\,dA$ $\quad$ $I_2 = \rho\int z^2 dA$

6-3-2 Bending

$$
\begin{aligned}
KG_{xz}^b bh\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2}+\frac{d\phi_x}{dx}\right)+\hat{q}&=0 \qquad (6.3\text{-}12a)\\
E_{xx}^b I_{yy}\frac{d^2\phi_x}{dx^2}-KG_{xz}^b bh\left(\frac{dw_0}{dx}+\phi_x\right)&=0 \qquad (6.3\text{-}12b)
\end{aligned}
$$

معادلات خمش تیر FSDT

$$\Rightarrow\quad E_{xx}^b I_{yy}\phi_x(x)=-\int_0^x\int_0^\zeta\int_0^\eta \hat{q}(\xi)\,d\xi\, d\eta\, d\zeta+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3 \qquad (6.3\text{-}13)$$

and

$$w_0(x) = -\frac{1}{E^b_{xx}I_{yy}}\left[-\int_0^x\int_0^\xi\int_0^\eta\int_0^\mu \hat{q}(\zeta)d\zeta d\mu d\eta d\xi + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4\right] + \frac{1}{KG^b_{xz}bh}\left[-\int_0^x\int_0^\xi \hat{q}(\zeta)d\zeta d\xi + c_1x\right] \qquad (4.3.13\text{t}$$

(6.3-14)

با دقت در رابطه (6.3-14) دیده می شود که رابطه خیز در تیر FSDT دو قسمت دارد یکی قسمت خمش خالص

و دیگری اثر برش عرضی

$$w_0(x) = w_0^b(x) + w_0^s(x)$$

(6.3-15)

$$w_0^b(x) = \frac{1}{E^b_{xx}I_{yy}}\left[\int_0^x\int_0^\xi\int_0^\eta\int_0^\mu \hat{q}(\zeta)d\zeta d\mu d\eta d\xi - c_1\frac{x^3}{6} - c_2\frac{x^2}{2} - c_3x - c_4\right]$$

$$w_0^s(x) = \frac{1}{KG^b_{xz}bh}\left[-\int_0^x\int_0^\xi \hat{q}(\zeta)d\zeta d\xi + c_1x\right] \qquad (4.3.$$

(6.3-16)

$w_0^b(x)$ همان خیز تیر کلاسیک می باشد.

اگر سختی برشی به اندازه کافی بزرگ باشد $w_0^s(x)$ به صفر میل می کند و دو تئوری

FSDT و CLPT برهم منطبق می شوند.

روابط تنش های درون صفحه‌ای تیر تیموشنکو به مانند تیر برنولی باقی می‌ماند (6.2-16)

$$\sigma_{xx}^{(k)}(x,z) = \frac{M(x)z}{b}\left(\bar{Q}_{11}^{(k)}D_{11}^{*} + \bar{Q}_{12}^{(k)}D_{12}^{*} + \bar{Q}_{16}^{(k)}D_{16}^{*}\right)$$
$$\sigma_{yy}^{(k)}(x,z) = \frac{M(x)z}{b}\left(\bar{Q}_{12}^{(k)}D_{11}^{*} + \bar{Q}_{22}^{(k)}D_{12}^{*} + \bar{Q}_{26}^{(k)}D_{16}^{*}\right) \qquad (6.3\text{-}17)$$
$$\sigma_{xy}^{(k)}(x,z) = \frac{M(x)z}{b}\left(\bar{Q}_{16}^{(k)}D_{11}^{*} + \bar{Q}_{26}^{(k)}D_{12}^{*} + \bar{Q}_{66}^{(k)}D_{16}^{*}\right)$$

همچنین تنش های برشی (روابط 6.2-19) همان باقی می‌مانند.

$$\sigma_{xz}^{(k)}(x,z) = -Q_x(x)\left(\bar{Q}_{11}^{(k)}D_{11}^{*} + \bar{Q}_{12}^{(k)}D_{12}^{*} + \bar{Q}_{16}^{(k)}D_{16}^{*}\right)\left(\frac{z^2 - z_k^2}{2}\right) + G^{(k)} \quad (4.2.15a)$$
$$\sigma_{zz}^{(k)}(x,z) = -\frac{dQ_x}{dx}\left(\bar{Q}_{11}^{(k)}D_{11}^{*} + \bar{Q}_{12}^{(k)}D_{12}^{*} + \bar{Q}_{16}^{(k)}D_{16}^{*}\right)\left(\frac{z^3 - z_k^3}{6}\right) + H^{(k)} \quad (4.2.15b)$$

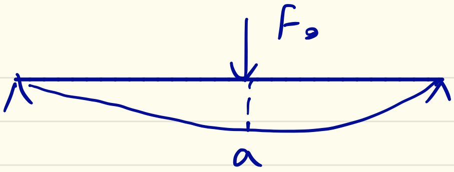
(6.3-18)

مثال: تیر دو سر مفصل با بار متمرکز (خمش سه نقطه‌ای)

$$M(x) = \frac{F_0 b x}{2} \quad و \quad Q(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{F_0 b}{2} \quad و \quad 0 \le x \le \frac{a}{2}$$

با استفاده از رابطه (6.3-9a) داریم.

$$\Phi_x(x) = \frac{F_0 b}{4 E_x^b I_y} x^2 + C_1$$



$$u = u_0 + z\phi_x \xrightarrow{\text{تقارن}} \phi_x\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{F_0 b a^2}{16 E_x^b I_y}$$

(شیب نیست)

$$\phi_x(x) = -\frac{F_0 b a^2}{16E^b_{xx}I_{yy}}\left[1-4\left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \quad 0\le x\le \frac{a}{2} \qquad (I)$$

با دقت در رابطه فوق دیده می شود که ϕ_x همان رابطه $-\frac{dw_0}{dx}$ تیر اویلر برنولی می باشد (ϕ_x
مستقل از سختی برشی می باشد).

توجه: همان خمش و در نتیجه تنش محوری مستقل از تغییر شکل برشی هستند. ϕ_x

هم در حالت مستقل از اثر تغییر شکل برشی است:

- تیر معین و تحلیل استاتیکی
- تیر نامعین با شرایط مرزی و بارگذاری متقارن.