بسم الله الرحمن الرحیم

مواد مکب

جلسه ۱۶

$$\delta I = \epsilon \left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0}$$

$$\delta F = F(x,\tilde{y},\tilde{y}') - F(x,y,y')$$

$$\delta I = \delta \int F dx = \int \delta F dx$$

می‌دانیم:

$$F(x,y+\epsilon\eta,y'+\epsilon\eta') = F(x,y,y') + \frac{\partial F}{\partial y}(\epsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\epsilon\eta') + \cdots$$

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}(\epsilon\eta) + \frac{\partial F}{\partial y'}(\epsilon\eta')} \qquad (1)$$

حال اگر انتخاب کنیم

$$F(x,y,y') \equiv y$$

$$\delta y = \epsilon \eta \qquad (2)$$

حال بار دیگر

$$F(x,y,y') \equiv y'$$

$$\delta y' = \epsilon \eta' \qquad (3)$$

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'} \qquad (4)$$

اگر از طرفین رابطه (2) مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \epsilon \eta' \xrightarrow{(3)} \frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

یعنی اپراتور $\frac{d}{dx}$ و δ خاصیت جابجائی دارند.

با توجه به رابطه (4) می توان دید که دو اپراتور δ و d تطابق‌های زیادی

با هم دارند.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy'$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

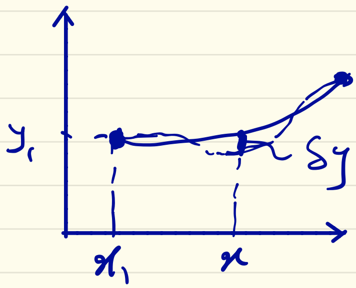
صفر است چون یک متغیر مستقل است.

مثال:

$$y = x^2 + 3\sin(x)$$

$$\delta\left(x^2 + 3\sin(x)\right) = 0$$

$$\delta(y) \neq 0$$



$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ \tilde{y}(x_1) = y_1 \end{cases}$$

چند خاصیت مفید :

1) $\delta(F_1 F_2) = (\delta F_1) F_2 + F_1 (\delta F_2)$

2) $\delta(F_1^{\,2}) = 2F_1 (\delta F_1)$

3) $\delta(y^2) = 2y\,\delta y$

اپراتور که بر روی متغیرهای وابسته (توابع) همانگونه رفتار می‌کند که $\frac{d}{dx}$ بر روی متغیرهای مستقل.

مثال:

$$I(u) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{c_0}{2} u^2 + \frac{c_1}{4} u'^4 + \frac{c_2}{2} u''^2 + f(x)\, u \right) dx$$

$\delta I = ?$

$$\delta I = \int \delta F\, dx = \int \left(c_0 u\, \delta u + c_1 u'^3\, \delta u' + c_2 u''\, \delta u'' + \underbrace{\cancel{\delta f}}_{0}\, u + f\, \delta u \right) dx$$

b- Energy Methods

کل انرژی پتانسیل سیستم

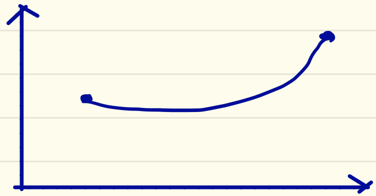
$$I = \int \overbrace{(U + W)}^{\Pi}\, dx \equiv$$

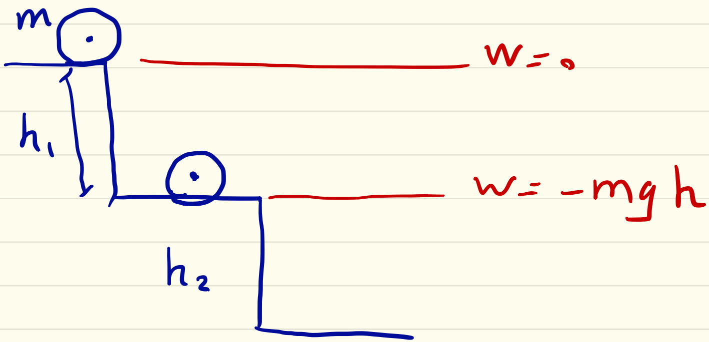
مینیمم

U: انرژی کرنشی

W: انرژی پتانسیل نیروهای خارجی (منفی کار انجام شده توسط نیروهای خارجی)

① اصل مینیمم انرژی پتانسیل





لاگرانژین $L = T - V$

T: انرژی جنبشی

V: انرژی پتانسیل وزنی

② همیلتون

$$I \equiv \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt \equiv$$ مینیمم

نتیجه:

$$\delta I = 0$$

C- Weak Form

معادله $\quad \ell(u) = u^2 + 3\sin(u) + u u' = 0$

اپراتور

چند تعریف:

۱- فانکشنال $\ell(u)$ را برحسب u خطی گویند اگر و فقط اگر

$$\ell(\alpha u + \beta v) = \alpha\, \ell(u) + \beta\, \ell(v)$$

2- فانکشنال $B(u, v)$ را دوخطی گویند اگر و فقط اگر

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v)$$

$$B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2)$$

فرض کنید معادله زیر را داریم

$$L(u) = P$$

مثلاً

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x)$$

توابع اولیه

$$= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

$$= a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) \cdots$$

شکل منعیف شده معادله فوق به ترتیب زیر به دست می آید:

مرحله اول: یافتن انتگرال وزنی باقیمانده:

$$R = L(\tilde{u}) - P$$

باقیمانده

$$\int w_i(x) R \, dx = 0$$

انتگرال وزنی باقیمانده

توابع وزن

مرحله دوم: کم کردن درجه مشتق تابع u در عبارت انتگرال وزنی

با استفاده از روش انتگرال جزء به جزء:

انتگرال جزء جزء:

$$\int_0^L w\,dv = -\int_0^L v\,dw + [wv]_0^L$$

مثال:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = q(x)$$

B.C. : $u(0) = u_0$, $a\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = Q_0$

حل:

$$\int_0^L w\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) - q\right]dx = 0$$

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx}\, a\frac{du}{dx} - wq\right)dx - \overbrace{\left[w\, a\frac{du}{dx}\right]_0^L}^{\text{عبارت مرزی}} = 0$$

معادله فوق شکل تضعیف شده معادله اصلی می باشد.

توجه ۱: شکل تابع معرف (u) یا آن گونه‌ای که تابع وزنی w در عبارت مرزی ظاهر شده است را متغیرهای اولیه می‌نامند. (در این مثال u متغیر اولیه است)

و مقدار معین متغیر اولیه روی مرز را شرط مرزی اساسی (E.B.C) می نامند.

شرط مرزی اساسی (هندسی) $\quad u = u_0$

توجه 2: شکل تابع هدف (u) به همان گونه‌ای که در عبارت مرزی ظاهر شده است را متغیرهای ثانویه می نامند. (دارای مثال $\frac{du}{dx}$ متغیر ثانویه است)

و مقدار معین یک متغیر ثانویه در روی مرز را شرط مرزی طبیعی (N.B.) می نامند.

طبیعی (نیرویی) $\quad \frac{du}{dx} = f_0$

مثال: $\frac{d^2}{dx^2}\left[b(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right] - f(x) = 0$ تیر

w : خیز تیر $\quad$ b : عرض تیر

$$\int_0^L \underbrace{v}_{\text{تابع وزن}} \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right) - f\right] dx = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(-\frac{dv}{dx}\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right) - vf\right]dx + \left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_0^L = 0$$

عبارت مرزی

$$\int_0^L \left(b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2} - vf\right)dx + \left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right) - \frac{dv}{dx}\, b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_0^L = 0$$

پس w و $\frac{dw}{dx}$ متغیرهای اولیه هستند

متغیرهای ثانویه

M و V