بسم الله الرحمن الرحیم — مواد مرکب — جلسه ۱۵

مثال ۱: ورق SSSS و بارگذاری عرضی $P=P_0$ را حل کنید.

$$P_0=\sum_m\sum_n P_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

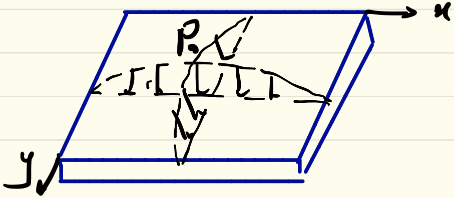
$$P_{mn}=\frac{16P_0}{\pi^2 mn}\qquad m,n=1,3,\dots$$

$$w=\frac{16P_0}{\pi^6 D}\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{1}{mn\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$m,n=1,3,\dots$

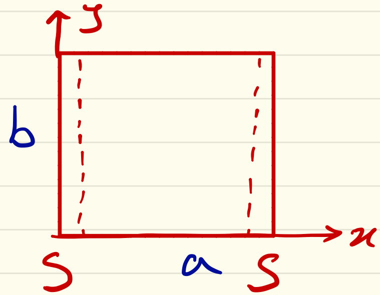
مثال ۲: ورق SSSS و بارگذاری $P=P_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ را حل کنید

$$P_{mn}=\begin{cases}P_0 & m=n=1\\ 0 & \text{سایر موارد}\end{cases}$$



$$w=\frac{P_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

۴ـ۷ـ۲ـ روش حل لوی



$$\nabla^4 w = \frac{P}{D}$$

$$\begin{cases} w = \sum_m Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \\ P = \sum_m P_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sum_m \left(Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_m \frac{P_m(y)}{D} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\Rightarrow Y_m^{IV}(y) - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} Y_m = \frac{P_m(y)}{D}$$

مثال: ورق در $x=0, a$ - تکیه‌گاه ساده و $P=P_0$ می‌باشد.

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D}$$

روش اول

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_0}{D}$$

$$w = w_p + w_h$$

جواب خصوصی ← w_p ، w_h → عمومی

الف - جواب خصوصی

$$w_p = \frac{P_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 - a^2x\right)$$

این جواب، معادله یک تیر در جهت x می‌باشد.

ب - جواب عمومی

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} = 0$$

$$w = \sum_m Y_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} Y_m = 0$$

$$Y_m = A_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (*)$$

روش دوم

$$\nabla^4 w = \frac{P_0}{D}$$

$$P = P_0 = \sum_m P_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

$$w = \sum_m Y_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4} Y_m = \frac{P_m}{D}$$

الف-جواب خصوصی

$$Y_p = \frac{a^4}{m^4\pi^4} \frac{P_m}{D} = \frac{a^4}{D} \frac{4P_0}{\pi^5 m^5}$$

ب- جواب عمومی، مانند معادله (*) است.

$$Y_m = \frac{P_0 a^4}{D}\left(A_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \frac{m\pi y}{a}\cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\right) \qquad (**)$$

اگر دو تکیه‌گاه دیگر ورق یعنی $y=\pm b/2$ یکسان باشد، عبارت Y_m باید زوج باشد. یعنی

$$C_m = D_m = 0$$

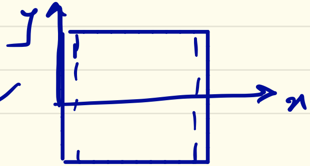
در ادامه فرض می‌کنیم دو تکیه‌گاه $y=\pm b/2$ هم تکیه‌گاه ساده باشند.

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad at\ y=\pm b/2$$

آنگاه داریم:

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \tanh(\alpha_m)+2)}{\pi^5 m^5 \cosh(\alpha_m)}, \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh(\alpha_m)}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$



که برابر با حل نویر می‌شود.

۴ـ۸ـ مقدمه ای بر روش انرژی:

a) Calculus of Variation

$y = f(x)$ function تابع

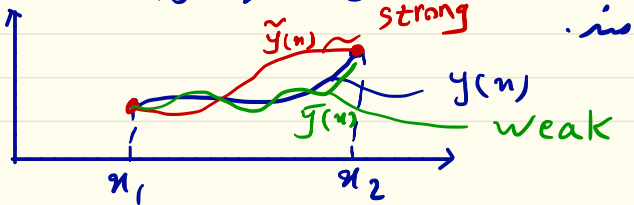
$$\begin{cases} F(x,y,y') = x+2y+5y' \\ I = \int F(x,y,y')\,dx \end{cases}$$ functional

در مسائل variational ما به دنبال extremum کردن یک فانکشنال هستیم. (Stationary)

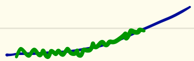
اگر $y(x)$ تابع مینیمم کننده I باشد آنگاه $I(y) = \text{minimum}$

$\tilde{y}(x) = y(x) + h(x)$ و $h(x_1)=0,\ h(x_2)=0$

$$I(\tilde{y}) > I(y)$$

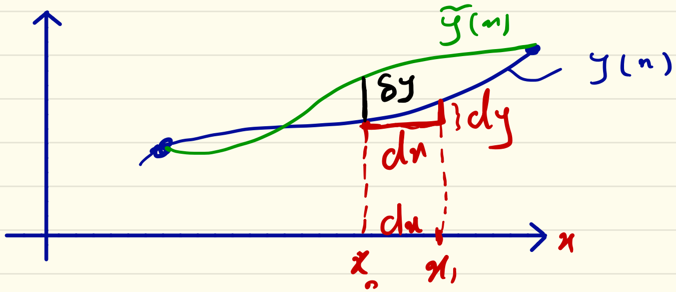


$\tilde{y}$ را یک تابع مقایسه می‌نامند.



تعریف :

$$\delta^{(T)} I = I(\tilde{y}) - I(y)$$



$$\delta y = \tilde{y} - y$$

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

$\eta(x)$: یک تابع مشخص

ϵ : مقداری کوچک

$$I(\tilde{y}) = I(y + \epsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\,dx$$

$\equiv$

$\tilde{I}(\epsilon) \rightsquigarrow$ function

سری تیلور

$$\tilde{I}(\epsilon) = \tilde{I}\Big|_{\epsilon=0} + \frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon^2 + \dots$$

$$\underline{\tilde{I}(\epsilon) - I} = \epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2!}\left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\epsilon^2}\right)\Big|_{\epsilon=0} + \dots$$

$$\delta^{(T)} I = \delta^{(1)} I + \delta^{(2)} I + \dots$$

اگر تقریب ما اندک باشد (weak variation) آنگاه

$$\delta^{(T)} I = \delta^{(1)} I = \delta I$$

اگر فرض کنیم $y(x)$ ، I را مینیمم کند:

$$\delta I = \tilde{I}(\epsilon) - I \geqslant 0 \qquad \text{for all } \epsilon$$

$$\epsilon\left(\frac{d\tilde{I}}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} \geqslant 0 \qquad \text{برای همه } \epsilon \text{ ها (مثبت و منفی)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\bar{I}}{d\epsilon}\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = 0$$

پس یاد گرفتیم که در یک مسئله وردش، اگر فانکشنالی بخواهد استیشنری شود باید وردش آن صفر شود

$$\boxed{I(y) \text{ استیشنری شود } \Longrightarrow \delta I = 0}$$