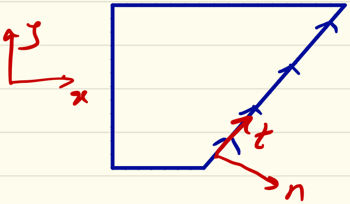
بسم الله الرحمن الرحیم — مواد مرکب — جلسه ۱۴

۴-۵ - شرایط مرزی ورق



۱- لبه ورق تکیه‌گاه ساده باشد.

$$w=0 \quad \text{و} \quad M_n=0$$

دانستیم برای ورق چندلایه

$$M_x=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$M_y=-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

با توجه به اینکه در امتداد "t" داریم $w=0$ پس می‌توان گفت

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{\text{لبه تکیه‌گاه ساده}}=0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0$$

پس شرط تکیه‌گاه ساده چنین می‌شود

$$\boxed{w=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0}$$

۲ـ لبه آزاد

$$Q_n \text{ و } M_n \text{ و } M_{nt} = 0$$

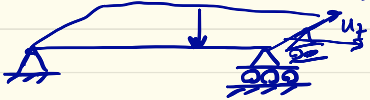
اما در تئوری کلاسیک و فرض های کیرشهف فقط دو پارامتر را در لبه می توان صفر کرد.
برای حل این مشکل پیشنهاد زیر داده شده است.

$$\boxed{M_n = 0 \quad \text{و} \quad V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0}$$

نیروی برشی معادل

۳ـ تکیه گاه گیردار

$$w = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$



شرایط مرزی تکیه گاه ها در حالت کلی تر

S_1: $w = 0$, $M_n = 0$ و $u_n = \bar{u}_n$ و $u_t = \bar{u}_t$

S_2: $w = 0$, $M_n = 0$ و $N_n = \bar{N}_n$ و $u_t = \bar{u}_t$

S_3: $w = 0$, $M_n = 0$ و $u_n = \bar{u}_n$ و $N_{nt} = \bar{N}_{nt}$

S_4: $w=0, \; m_n=0, \; N_n=\bar{N}_n, \; N_{nt}=\bar{N}_{nt}$

C_1: $w=0, \; \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, \; u_n=\bar{u}_n, \; u_t=\bar{u}_t$

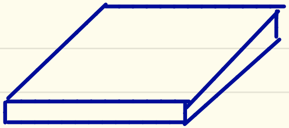
C_2: $w=0, \; \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, \; N_n=\bar{N}_n, \; u_t=\bar{u}_t$

C_3: $w=0, \; \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, \; u_n=\bar{u}_n, \; N_{nt}=\bar{N}_{nt}$

C_4: $w=0, \; \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, \; N_n=\bar{N}_n, \; N_{nt}=\bar{N}_{nt}$

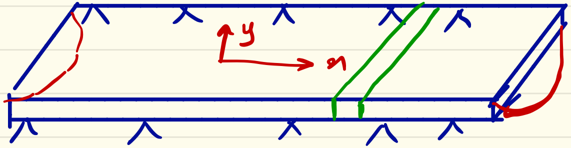
۶-۴ _ حالتهای خاص ورق

حالت کلی



۱ـ صفحه در یک بعد بی تفاوت باشد. مثلاً در یک بعد طول بینهایت داشته باشد و شرایط مرزی و
بارگذاری در آن امتداد تغییر نکند.

cylindrical bending



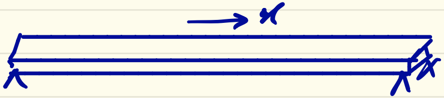
(یک بعدی)

$$\frac{d}{dx}(\cdots) = 0$$

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \longrightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

$$w(x,y) \rightsquigarrow w(y)$$

۲ـ صفحه‌ای که یک بعد آن کوچک باشد: تیر



$$w(x,y) \rightsquigarrow w(x)$$

۷-۴ _ استفاده از توابع متعامد برای حل معادلات ورق

مقدمه ۱: توابع متعامد (عمود بر هم)

$$\frac{dx}{dy} + 4\frac{d^2x}{dy^2} + 5x^2 + 6\sin(x) = 0 \longrightarrow L(x) = 0$$

عملگر

$$L(..) = \frac{d}{dy}(..) + 4\frac{d^2}{dy^2}(...) + 5(--)^2 + 6\sin(-)$$

عملگر دو آرگمانی

$$L(x,y) \equiv 5x^2 + 6y^2 + 3xy$$

x,y متعامد هستند if $L(x,y) = 0$

dot operation: $\vec{a} \perp \vec{b}$ if $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

مقدمه ۲: فضاهای چندبعدی

$$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} , \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} \qquad a\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+b\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}2\\0\end{Bmatrix}$$

بردارهای پایه: حداقل بردارهایی که بتوانیم بوسیله آنها تمام اعضای مجموعه را پوشش دهیم (ترکیب خطی از بردارهای پایه بتوانند تمام اعضا را تشکیل دهند)

$$\begin{Bmatrix}a\\b\\c\end{Bmatrix} \leftarrow$$ فضای سه بعدی

به عنوان مثال می‌توان هر تابعی را برحسب بردارهای پایه سینوسی تشکیل داد

$$P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin(ix) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) \dots$$

می‌دانیم که توابع سینوسی برهم عمود هستند:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{a}{2} & n = m \end{cases}$$

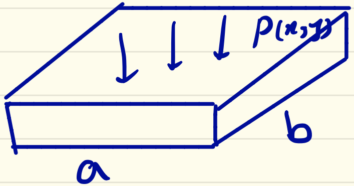
$$\rho(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + a_3 \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \cdots -$$

$$\int_0^a \rho \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx = 0 + a_2 \frac{a}{2} + 0 + \cdots$$

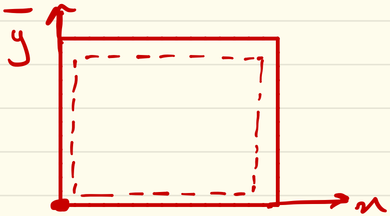
$$a_2 = \frac{2}{a} \int_0^a \rho \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx$$

$$\boxed{a_i = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x) \sin\left(\frac{i\pi}{a}x\right) dx}$$

۸-۴- روش حل ناویر



$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}$$



SSSS

$$p = \sum_n \sum_m P_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

با این شرایط مرزی می‌توان چنین نوشت

$$W = \sum_n \sum_m W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$w_{mn}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\left(\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right) = \frac{P_{mn}}{D}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$w_{mn}\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2 \cdot \pi^4 = P_{mn}/D$$

$$\Rightarrow w_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2}$$