

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

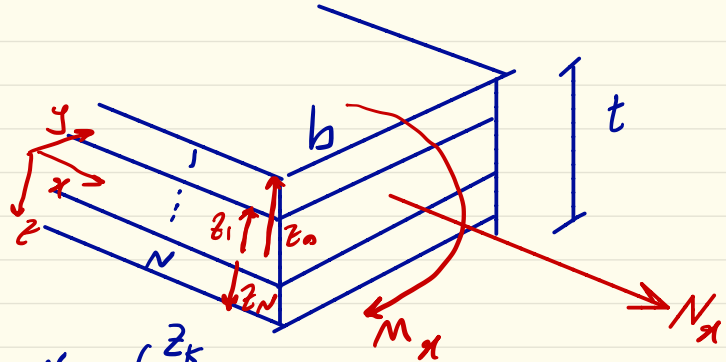
مواد مرکب

جلد ۹

۳-۲-۳- برای بندنیزها در ممانها براس صفحات چند لایه:

$$N_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x dz$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} z \sigma_x dz$$



$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\{\epsilon\}^0 + z \{\kappa\}) dz$$

$$= \underbrace{\left( \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) \right)}_{[A]} \{\epsilon\}^0 + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right)}_{[B]} \{\kappa\}$$

$$\{N\} = [A] \{\epsilon\}^0 + [B] \{\kappa\}$$

$$\{m\} = [B] \{\epsilon\}^0 + [D] \{\kappa\}$$

$$[A] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1})$$

$$[B] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$[D] = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

حالت خاص:

الغ - تكلايه  $[B] = 0$

ارتودوب

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & \nu A_{11} & 0 \\ \nu A_{11} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A_{11} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & \nu D_{11} & 0 \\ \nu D_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_{11} \end{bmatrix}$$

ارتودوب متعامد  
0° و 90°

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

ارتوتروپ غیر متعام

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$$

ب - ضدلایه متعارف  $[B] = 0$



۱- از نظر هندسی متعارف باشد

۲- از نظر لایه‌بندی متعارف باشد

$$A_{16} = A_{26} = 0 \quad \text{و} \quad D_{16} = D_{26} = 0$$

① متعارف بالای‌های ارتوتروپ

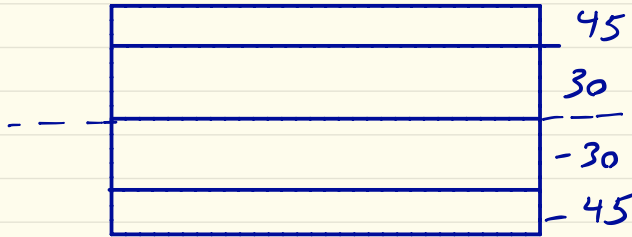
② متعارف بالای‌های متعام (معموله)

③ متعارف بالای‌های دلخواه  $\leftarrow [A]$  و  $[D]$  برده شده.

ج - چند لایه با تقارن معکوس  $[B] \neq 0$

۱- از نظر هندسی متقارن باشد

۲- از نظر لایه صیغی یا در متقارن باشد



① تقارن معکوس بالاییه های متعامد

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

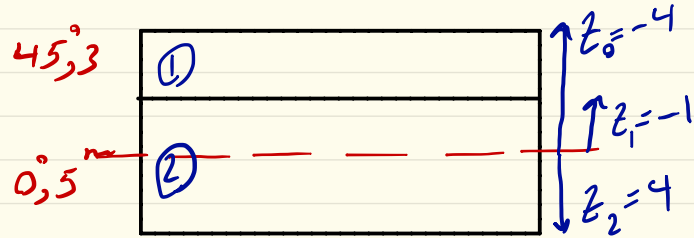
② تقارن معکوس ولایه صیغی غیر متعامد

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

مثال ۱: صفحه ای دو لایه رادز نظر بگیرید. لایه پایینی صفز درجه و ضخامت آن  $5 \text{ mm}$  است. لایه بالایی دارای زاویه  $45^\circ$  و ضخامت  $3 \text{ mm}$  می باشد. ماتریس سختی  $[\bar{Q}]$  را برای هر یک از لایه ها بیابید و آورید.

$$[Q] = \begin{bmatrix} 20 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \frac{GN}{m^2}$$

همین ماتریس برای سفتی ورق را بیابید.



$$A = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) = [\bar{Q}]_{45^\circ} ((-1) - (-4)) + [\bar{Q}]_0 (4 - (-1))$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 6.55 & 5.13 & 4.5 \\ \text{Sym} & 6.53 & 4.5 \\ & & 5.15 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 20 & 0.7 & 0 \\ \text{Sym} & 0.2 & 0 \\ & & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 112.65 & 18.25 & 13.5 \\ \text{Sym} & 29.65 & 13.5 \\ & & 18.25 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot \text{mm}$$

$$B = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} [\bar{Q}]_{45^\circ} ( (-1)^2 - (-4)^2 ) + \frac{1}{2} [\bar{Q}]_0 ( 4^2 - (-1)^2 )$$

$$= 7.5 \left[ - \begin{bmatrix} 6.35 & 5.15 & 4.5 \\ \text{sym} & 6.55 & 4.5 \\ & & 5.15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 0.7 & 0 \\ \text{sym} & 0.2 & 0 \\ & & 0.7 \end{bmatrix} \right]$$

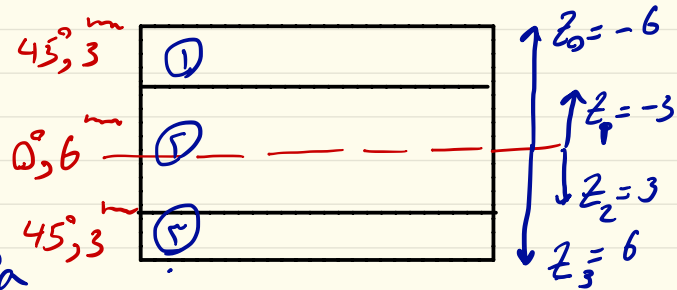
$$= \begin{bmatrix} 100.9 & -38.4 & -33.75 \\ & -34.1 & -33.75 \\ \text{sym} & & -33.4 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot \text{mm}^2$$

$$D = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}]_k \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \dots = \begin{bmatrix} 571 & 123 & 94.3 \\ & 181 & 94.3 \\ \text{sym} & & 123 \end{bmatrix} \text{ GPa} \cdot \text{mm}^3$$

مسال ۵: در یک سه لایه، لایه های بالایی دارای زاویه  $45^\circ$  و ضخامت ۳ میلی و سه لایه وسطی  $0^\circ$  با ضخامت ۶ است. خصوصیات ما را مانند مثال ۱ می یابند. ماتریس سختی لایه را بیابید.

$$[\bar{Q}]_2 = \begin{bmatrix} 20 & 9.7 & 0 \\ & 0.2 & 0 \\ \text{sym} & & 0.7 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$[\bar{Q}]_1 = [\bar{Q}]_3 = \begin{bmatrix} 6.53 & 5.15 & 4.5 \\ & 6.53 & 4.5 \\ \text{sym} & & 5.15 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$



$$A = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) = [\bar{Q}]_1 ((-3) - (-6)) + [\bar{Q}]_2 (3 - (-3)) + [\bar{Q}]_3 (6 - 3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 159.3 & 35.1 & 27 \\ & 51.3 & 27 \\ \text{sym} & & 35.1 \end{bmatrix}$$



$$B = \sum_{k=1}^N [\bar{a}]_k \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} [\bar{a}]_1 ((-3)^2 - (-6)^2)$$

$$+ \frac{1}{2} [\bar{a}]_2 (3^2 - (-3)^2) + \frac{1}{2} [\bar{a}]_3 (6^2 - 3^2) = 0$$

$$D = \sum_{k=1}^N [\bar{a}]_k \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \dots = \begin{bmatrix} 1185.3 & 661.3 & 567 \\ & 861.3 & 567 \\ \text{sym} & & 661.5 \end{bmatrix} \text{GPa} \cdot \text{mm}^3$$