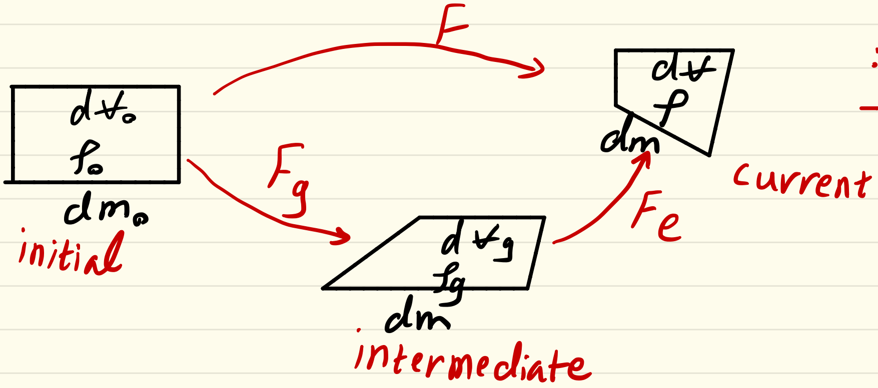
بسم الله الرحمن الرحیم

مکانیک رشد

جلسه ۱۲

ب ـ بیوشکلی در بافت زنده:



$$dm = \rho_g \, dV_g = \rho \, dV$$

$$J = \frac{dV}{dV_0} \quad , \quad J = \frac{dV}{dV_g} \cdot \frac{dV_g}{dV_0} = J_e \, J_g$$

$$\rho_g = \frac{dm}{dV_g} = \frac{\rho \, dV}{dV_g} = \rho \, J_e$$

....

$$\boxed{J_e \frac{d\rho}{dt} + \rho_g \, tr(l_e) = \frac{d\rho_g}{dt}}$$

برای بافت نرم $\rho_g = \rho = \text{Constant}$

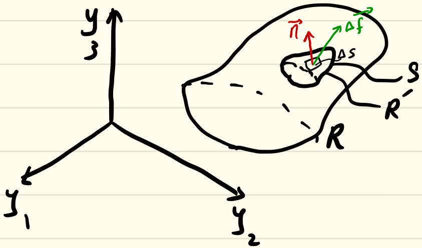
$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \, tr(l_e) = 0}$$

اگر تراکم ناپذیر باشد

$J_e = 1$ و $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Longrightarrow tr(l_e) = 0$

Chapter 3 Analysis of stress ;

3.1) یادآوری :



$\Delta \vec{F}$: نیروی خارجی وارد بر ΔS

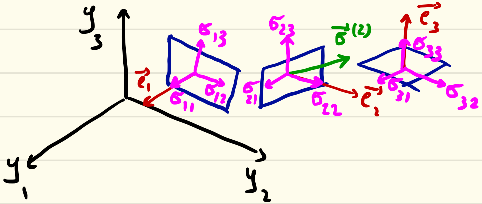
$\vec{n}$: بردار عمود بر سطح ΔS

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{ds}$$ بردار تنش

$$\sigma_i = \frac{df_i}{ds}$$

$$\vec{\sigma}^{(\vec{n})} = \frac{d\vec{f}^{(\vec{n})}}{ds}$$ Traction

Stress vector on coordinate planes



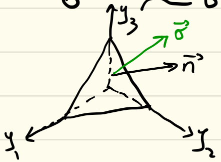
$\vec{\sigma}^{(1)} =$ تنش وارد بر ΔS_1 $= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3 = \sigma_{1j}\vec{e}_j$

$\vec{\sigma}^{(2)} = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3 = \sigma_{2j}\vec{e}_j$

$\vec{\sigma}^{(3)} = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 = \sigma_{3j}\vec{e}_j$

$$\boxed{\vec{\sigma}^{(i)} = \sigma_{ij}\vec{e}_j}$$

$\vec{\sigma}^{(\vec{n})} \overset{?}{\sim} \vec{\sigma}^{(1)}, \vec{\sigma}^{(2)}, \vec{\sigma}^{(3)}$



$\vec{\sigma} = n_i \vec{\sigma}^{(i)}$

$\boxed{\vec{\sigma} = n_i \sigma_{ij} \vec{e}_j}$ $\boxed{\sigma_i = \sigma_{ji} n_j}$

Cauchy's stress theorem

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

توجه: پس هر صفحه ای که از نقطه P می گذرد را می توان برحسب تنش در صفحات مختصات نمایش داد. ← σ_{ij} تانسور تنش

Principal stress & principal axis:

$\vec{\sigma} = \sigma \vec{n} = \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}$

$\sigma \overset{\delta_{ij} n_j}{n_i} = \sigma_{ji} n_j \Rightarrow (\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$

$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$

$\boxed{\sigma^3 - \theta \sigma^2 + \phi \sigma - \psi = 0}$ $\sim \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ تنش های اصلی

$\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \overleftrightarrow{\sigma}_s = \sigma_{ii}$ (invarient)

$\phi = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ (invarient)

$\psi = |\sigma_{ij}|$ (invarient)

Stress deviator tensor

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{kk} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{kk} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{deviator tensor}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{تنش هیدرواستاتیک}}$$

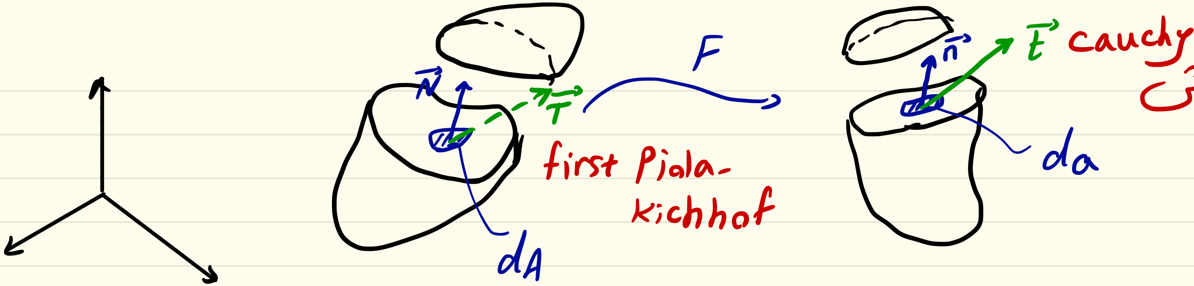
دارا تغییرحجم

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

تغییرحجم صفر است و فقط تغییرشکل دارد

$$\hat{\sigma}_{ii} = 0 = \frac{\Delta V}{V} \rightsquigarrow \Delta V = 0$$

3.2_ انواع تنش



$\vec{df}$: internal force (interaction)

$\vec{T}, \vec{t}$: surface traction, Contact force, Stress vector

$$\vec{df} = \vec{t}\, da = \vec{T}\, dA$$

$$\vec{t} \equiv t(x, t, \vec{n}) \quad , \quad \vec{T} \equiv T(X, t, \vec{N})$$

$\vec{t}$: cauchy traction vector (force measured per unit surface area defined the current configuration)

$\vec{T}$: first Piola-Kirchhof traction vector (. . . . - - . in the reference)

$\vec{T}$ درهای جهت $\vec{t}$ فرض شده است. لذا یک کمیت واقعی قابل اندازه‌گیری نیست. به همین خاطر
بصورت نقطه‌چین نمایش داده شده است.

cauchy stress theorem:

$$\vec{t}(x,t,\vec{n}) = \overleftrightarrow{\sigma}(x,t)\cdot\vec{n} \quad \text{or} \quad t_a = \sigma_{ab}\, n_b$$

$$\vec{T}(X,t,\vec{N}) = \overleftrightarrow{P}(X,t)\cdot\vec{N} \quad \text{or} \quad T_a = P_{aA}\, N_A$$

σ: Cauchy (or true) stress tensor (cauchy stress) (symetric) (spatial)

P: first Piola-Kirchhof stress tensor (Piola stress)
two-point tensor

$$d\vec{f} = \vec{t}\,da = \vec{T}\,dA$$

$$\vec{\sigma}(x,t)\cdot\vec{n}\,da = \vec{P}(X,t)\cdot\vec{N}\,dA$$

Nansan's formula $\longrightarrow$ $\sigma \cdot J F^{-T}\vec{N}\,dA = P\cdot\vec{N}\,dA$

$$\boxed{P = J\,\sigma\cdot F^{-T}}$$

$$P_{aA} = J\,\sigma_{ab}\,F^{-1}_{Ab}$$

$$P^{T} = J F^{-1}\cdot\sigma^{T} = J F^{-1}\cdot\sigma \neq P$$

پس تنش پیولا متقارن نیست

Example

$$x_1 = -6X_2 \,,\quad x_2 = \tfrac{1}{2}X_1 \,,\quad x_3 = \tfrac{1}{3}X_3 \,,\qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

تنش کوشی دریک نقطه خاص

بردار تنش کوشی و بردار تنش پیولا را روی صفحه‌ای که عمود بر آن $\vec{n} = \vec{e}_2$ است

بیابید:

Solution:

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad [F]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(F) = J = 1$$

$$[P] = J[\sigma][F]^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

نانسون:

$$\vec{da} = \vec{n}\,da = J\,F^{-T}\cdot(\vec{N}\,dA) \Longrightarrow$$

$$\vec{N}\,dA = J^{-1}F^{T}\cdot(\vec{n}\,da) = \tfrac{1}{2}\vec{e}_1\,da \longrightarrow \vec{N} = \vec{e}_1$$

$$\{t\} = [\sigma]\cdot\{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{kN}{cm^2} \quad , \quad \{T\} = [P]\cdot\{N\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

راحت تر هستیم که با تنشی کار کنیم که در دستگاه مختصات اولیه (material configuration) باشد. لذا تنسور پیولا را توسط تانسور F^{-1} به تعریف اولیه می بریم.

تعریف

$$\boxed{S = F^{-1}\cdot P}$$

second Piola-Kirchhof stress (second Piola stress)

(material)

معنی فیزیکی دارد. برای استفاده در محاسبات و همچنین constitutive eq. راحت تر است.

$$\boxed{P = F\cdot S}$$

$$S = F^{-1}\cdot P = \boxed{J\, F^{-1}\cdot\sigma\cdot F^{-T}}$$

$$S_{AB} = (F^{-1})_{Aa}\, P_{aB} = J\,(F^{-1})_{Aa}\,(F^{-T})_{Bb}\,\sigma_{ab}$$

آیا S متقارن است؟

$$S^T = (J F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T})^T = J F^{-1} \cdot \sigma^T \cdot F^{-T} = S$$

S متقارن است

تنش کرشهوف از Push-forward تنش دوم پیولا بدست می‌آید.

تعریف

$$\boxed{\tau = F \cdot S \cdot F^T}$$ Kirchhof stress tensor (spatial)

$$\boxed{\tau = J \sigma}$$

$$\tau_{ab} = F_{aA} F^T_{bB} S_{AB}$$

آیا τ متقارن است؟

$$\tau^T = (F \cdot S \cdot F^T)^T = F \cdot S^T \cdot F^T = F \cdot S \cdot F^T = \tau$$

متقارن است

تعریف $\boxed{M = \Sigma = C.S}$ Mandel stress tensor

برای حالت intermediate config. تعریف شده است. در پلاستیسیته هم کاربرد دارد.

$$M^T = (C.S)^T = S^T.C^T = S.C$$

لزوماً متقارن نیست

تمرین سری : 6.3

Holzapfel P.129 , N.2