بسم الله الرحمن الرحیم

مکانیک رشد

جلسه ۱۱

$$\boxed{F = R \cdot U}$$

تانسور راست کشیدگی

(لاگرانژی (material))

تانسور چرخش متعامد

$$\begin{cases} R^T \cdot R = I \\ U^T = U \end{cases}$$

symetric

$$dx' = U \cdot dx$$

$$dx = R \cdot dx'$$

دوران صلب

$$\vec{n} = R \cdot \vec{n}_0$$

$$\boxed{F = V \cdot R}$$

تانسور چپ کشیدگی

(اویلری (spatial))

$$v^T = v \quad \text{symetric}$$

U, V : unique, positive definite, symetric tensors

useful properties:

$C = U^2$ متقارن ، $b = v^2$ متقارن

$$b = R \cdot C \cdot R^T$$

$$\det(U) = \det(V) = J$$

The rate of strain tensor

$v_i(x,t)$: The valocity of point "P"

$v_i(x+dx,t)$: " " " "Q"

$$v_i(x+dx,t) = v_i(x,t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \cdots$$

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = v_{i,j}\, dx_j$$

velocity gradient

$$v_{i,j} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)}_{d_{ij}\ \text{(symetric)}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right)}_{w_{ij}\ \text{(anti-symetric)}}$$

d_{ij} : (Eulerian) rate of Strain tensor $\left(\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})\right)$

w_{ij} : (Eulerian) ispin tensor (چرخش) $\left(\frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i})\right)$

تعریف تانسور گرادیان سرعت $l_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=v_{i,j} \longrightarrow l_{ij}=d_{ij}+w_{ij}$

$$l=\frac{\partial v_i}{\partial X_A}\cdot\frac{\partial X_A}{\partial x_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right)\cdot\frac{\partial X_A}{\partial x_j}$$

$$\boxed{\begin{gathered} l=\dot{F}\cdot F^{-1} \\ \dot{F}=l\cdot F \end{gathered}}$$

$$F = F_e \cdot F_g$$

$$\ell = \dot{F} \cdot F^{-1} = \overline{(F_e \cdot F_g)}^{\circ} \cdot (F_e \cdot F_g)^{-1} = (\dot{F}_e \cdot F_g + F_e \cdot \dot{F}_g)\,(F_g^{-1} \cdot F_e^{-1})$$

$$= \dot{F}_e \cdot \underbrace{F_g \cdot F_g^{-1}}_{I} \cdot F_e^{-1} + F_e \cdot \dot{F}_g \cdot F_g^{-1} \cdot F_e^{-1} = \dot{F}_e \cdot F_e^{-1} + F_e \cdot (\dot{F}_g \cdot F_g^{-1}) \cdot F_e^{-1}$$

تعريف : $\quad L = F_e^{-1} \cdot \ell \cdot F_e$

$$L = F_e^{-1} \cdot \left[\dot{F}_e \cdot F_e^{-1} + F_e \cdot (\dot{F}_g \cdot F_g^{-1}) \cdot F_e^{-1}\right] \cdot F_e$$

$$L = \underbrace{F_e^{-1} \cdot \dot{F}_e}_{L_e} + \underbrace{\dot{F}_g \cdot F_g^{-1}}_{L_g}$$

$$\boxed{L = L_e + L_g}$$

جمع بندی

$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ گرادیان تغییر شکل و $J = |F|$ ژاکوبین

تانسور تغییر شکل کوشی $c = (F^{-1})^T \cdot (F^{-1})$

$C = F^T \cdot F$ تانسور تغییر شکل گرین

(تانسور راست تغییر شکل کوشی-گرین)

تانسور چپ تغییر شکل کوشی گرین $b = F \cdot F^T$

$F = R \cdot U$ U: تانسور راست کشیدگی R: تانسور چرخشی متعامد

$F = V \cdot R$ V: تانسور چپ کشیدگی

E_{ij} کرنش لاگرانژی (محدود/گرین) e_{ij}: کرنش اویلری محدود (آلمانسی) ε_{ij} کرنش خطی

$2E = C - I$ $2e = I - c$

$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ نرخ کرنش $w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$ چرخش

$l = \dot{F} \cdot F^{-1}$ گرادیان سرعت $l_{ij} = d_{ij} + w_{ij}$

2.3) Jacobian and Continuity equation:

$$J(X,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k}$$

$$\frac{\partial J(X_i,t)}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial v_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_i}}_{\text{اویلری}} \Bigg|_{x_i = x_i(X,t)}}_{\text{لاگرانژی}} \cdot \underbrace{J(X_i,t)}_{\text{لاگرانژی}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = v_{i,i}\Big|_{x_i = x_i(X,t)} \cdot J$$

$$\frac{d\, j(x,t)}{dt} = v_{i,i}\; j(x,t)$$

بصورت کلی

$$\boxed{\dot{J} = J\, v_{i,i}}$$

$$\dot{J} = J\, \mathrm{div}(\vec{v})$$

یادآوری:

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det(A)\, A^{-T}$$

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial F} : \dot{F} = J F^{-T} : \dot{F} = J I : \underbrace{(\dot{F} \cdot F^{-1})}_{l}$$

یادآوری:

$$A : B = \mathrm{tr}(A^{T} \cdot B)$$

$$\dot{J} = \mathrm{tr}(J I \cdot l) = J\, \mathrm{tr}(l)$$

$$\boxed{\dot{J} = J\, \mathrm{div}(\vec{v}) = J\, \mathrm{tr}(l)}$$

دیدیم که $\quad d\forall = J\, d\forall_0$

چون $\quad d\forall(X,0) = d\forall_0 \quad \Leftarrow \quad J(X,0) = 1$

$$d\dot{\forall} = \dot{J}\, d\forall_0 = v_{i,i}\, d\forall$$

اگر ما سیستم تراکم ناپذیر باشد:

$$d\dot{\forall} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{i,i} = \operatorname{div}(\bar{v}) = 0}$$

شرط تراکم ناپذیری

الف - کانتینیوم غیرزنده :

$D_0(X_i)$ = Density of a particle X_i at $t=0$

$D(X,t)$ = " " " " at $t=t$

قانون بقای جرم

جرم ذره $\quad D_0\, dV_0 = D\, dV$

$$\boxed{\frac{\partial (D\, dV)}{\partial t} = 0}$$

بیان لاگرانژی بقای جرم

Continuity eq.

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\rho\, dv) = 0}$$

$\rho(x,t) = D[X_i(x,t), t]$ بیان اویلری جرم حجمی

$dv = dV[X_i(x,t), t]$ بیان اویلری حجم المان

$$DJ = D_0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(DJ) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} \xrightarrow{\dot{J} = v_{i,i} J}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0}$$

بقای جرم برای یک ذره

incompresible Continum $\qquad \frac{d\rho}{dt} = 0$

homogeneous continum: $\qquad \rho =$ a constant