بسم الله الرحمن الرحیم — مکانیک رشد — جلسه ۱۵

نوع دیگر تجزیه F:

$$F = F_{vol} \cdot \bar{F}$$

F_{vol}: Volumetric deformation ...

$\bar{F}$: Isochoric deformation ... $|\bar{F}| = 1$

$$|F| = |F_{vol}|\,|\underbrace{\bar{F}}_{1}| \Longrightarrow |F_{vol}| = |F| = J$$

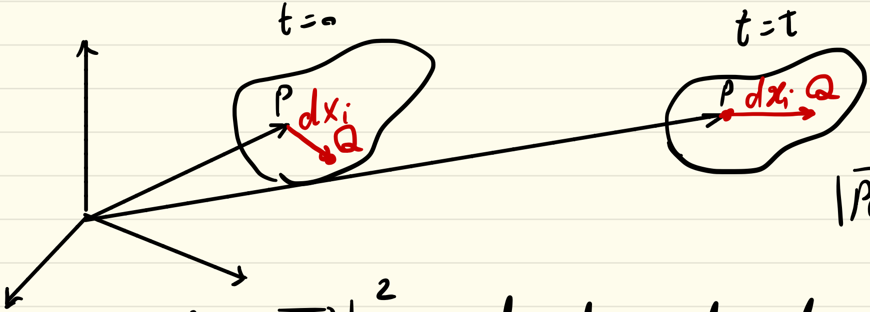
چون می دانیم که

$$\det(\alpha I) = \alpha^3$$

لذا کاندید بیشتر برای F_{vol} می تواند چنین باشد

$$F_{vol} = J^{1/3} I$$

2.2- strain and rate of strain tensors:



$$|\vec{PQ}|_t^2 = (dx_i\vec{e_i}).(dx_j\vec{e_j}) = dx_i dx_i$$

$$|\vec{PQ}|_{t=0}^2 = (dX_i\vec{e_i}).(dX_j\vec{e_j}) = dX_i dX_i$$

$$|\vec{PQ}|_t^2 - |\vec{PQ}|_{t=0}^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i \qquad (*)$$

$$X_r = X_r(x,t) \longrightarrow dX_r = \frac{\partial X_r}{\partial x_i} dx_i$$

$$|PQ|_t^2 - |\vec{PQ}|_{t=0}^2 = dx_i dx_j \delta_{ij} - \frac{\partial X_r}{\partial x_j} dx_j \cdot \frac{\partial X_r}{\partial x_i} dx_i$$

C تانسور تغییر شکل کوشی

$$= \underbrace{\left(\delta_{ij} - \overbrace{\frac{\partial X_r}{\partial x_i}\frac{\partial X_r}{\partial x_j}}^{C}\right)}_{2e_{ij}} dx_i dx_j$$

Eulerian finite strain tensor (Almansi) ← $2e_{ij}$

تانسور تغییر شکل کوشی

$$\boxed{C = (F^{-1})^T \cdot F^{-1}}$$

$$2e_{ij} = \delta_{ij} - C_{ij} \qquad \boxed{2e = I - C}$$

تانسور چپ تغییر شکل کوشی گرین

$$\boxed{b = F \cdot F^T} \Rightarrow c = b^{-1} \Rightarrow \boxed{2e = I - b^{-1}}$$

$$\det(b) = (\det(F))^2 = J^2 > 0$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2e\,dx\,dx$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{2}\,\frac{(dx)^2 - (dX)^2}{dx\,dx} = \frac{1}{2}\,\frac{dx + dX}{dx} \cdot \frac{dx - dX}{dx}$$

اگر تغییر شکل ها کوچک باشد برابر 2 است

$$e \approx \frac{dx - dX}{dx}$$

$$X_r = x_r - u_r(x,t) \Rightarrow \frac{\partial X_r}{\partial x_i} = \delta_{ri} - \frac{\partial u_r}{\partial x_i}$$

$$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right]}$$

اگر تغییر شکل ها کوچک باشد $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$ آنگاه

$$e_{ij} \longrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Eulerian linear strain tensor

دوباره

$$|\vec{PQ}|_t^2 - |\vec{PQ}|_{t=0}^2 = dx_r\, dx_r - dX_i\, dX_i$$

$$x_r = x_r(X_i, t) \Rightarrow dx_r = \frac{\partial x_r}{\partial X_i} dX_i$$

تانسور تغییر شکل گرین

$$|\vec{PQ}|_t^2 - |\vec{PQ}|_{t=0}^2 = \underbrace{\left(\overbrace{\frac{\partial x_r}{\partial X_i} \frac{\partial x_r}{\partial X_j}}^{C_{ij}} - \delta_{ij} \right)}_{2E_{ij}} dX_i\, dX_j$$

Lagrangian or Green finit strain tensor

تانسور راست تغییر شکل کوشی گرین

$$\boxed{C = F^T \cdot F}$$

$$\boxed{2E = C - I}$$

یا $E_{AB} = \frac{1}{2}\left[C_{AB} - \delta_{AB}\right]$

$$E_{AB} = \frac{1}{2} \frac{(dx)^2 - (dX)^2}{dX\, dX} \approx \frac{dx - dX}{dX}$$

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\left[U_{A,B} + U_{B,A} + U_{i,A}\, U_{i,B} \right]$$

در تغییر شکل های کوچک

$$\boxed{\varepsilon_{ij} \simeq e_{ij} \simeq E_{AB} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)}$$

$$\det(C) = \left(\det(F)\right)^2 = J^2 > 0$$

Push-Forward & Pull-Back operation

E: belong to reference configuration (E_{AB})

e: belong to current configuration (e_{ab})

مثلاً F: associate both configuration (two-point tensor)

تعریف: Push-Forward عملیاتی است که طی آن بردار یا تانسوری را که براساس توصیف اولیه (لاگرانژی) بیان شده است را به توصیف ثانویه (اولری) منتقل می‌کند.

$$e = \tfrac{1}{2}\left(I - F^{-T}\cdot F^{-1}\right) = F^{-T}\cdot\left[\tfrac{1}{2}F^{T}\cdot\left(I - F^{-T}\cdot F^{-1}\right)\cdot F\right]\cdot F^{-1}$$

$$= F^{-T}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(F^{T}\cdot F - I\right)\right]\cdot F^{-1} = F^{-T}\cdot E\cdot F^{-1}$$

$$\chi_{*}(E) = F^{-T}\cdot E\cdot F^{-1} \quad (\equiv e)$$ Push-forward

$$E = \tfrac{1}{2}\left(F^{T}\cdot F - I\right) = F^{T}\cdot\left[\tfrac{1}{2}F^{-T}\cdot\left(F^{T}\cdot F - I\right)\cdot F^{-1}\right]\cdot F$$

$$= F^{T}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\left(I - F^{-T}\cdot F^{-1}\right)\right]F = F^{T}\cdot e\cdot F$$

$$\chi^{*}(e) = \chi_{*}^{-1}(e) = F^{T}\cdot e\cdot F \quad (\equiv E)$$ Pull-back

تمرین : 6.2

Holzapfel p. 84 N. 2,3