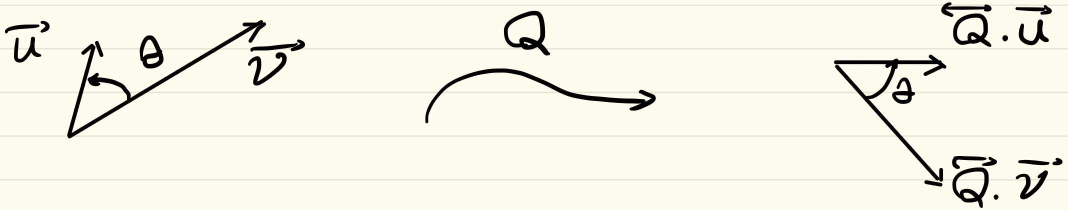
بسم الله الرحمن الرحیم — مکانیک رشد — جلسه ۹

1-10) orthogonal Tensor

تعریف: $\overleftrightarrow{Q}$ را یک تانسور orthogonal می‌گویند اگر تبدیل خطی به گونه زیر باشد



$\theta, |\vec{u}|, |\vec{v}|$: ثابت باشند (rotation)

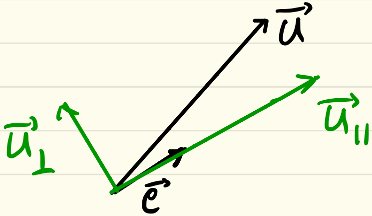
$$(\overleftrightarrow{Q}.\vec{u}).(\overleftrightarrow{Q}.\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$$

useful properties: $Q^T.Q = Q.Q^T = I \Rightarrow \det(Q^T.Q) = 1 \Rightarrow (\det(Q))^2 = 1$

$Q^{-1} = Q^T$

$\Rightarrow \det(Q) = \pm 1$ proper/improper orthogonal

1-11) Projection, spherical and deviatoric tensors



$$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$$

$$\vec{u}_{\parallel} = (\vec{u}\cdot\vec{e})\,\vec{e} = \overbrace{(\vec{e}\otimes\vec{e})}^{P_e^{\parallel}}\cdot\vec{u} = \overleftrightarrow{P}_e^{\parallel}\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel} = \overbrace{(\vec{I} - \vec{e}\otimes\vec{e})}^{\vec{P}_e^{\perp}}\cdot\vec{u} = \overleftrightarrow{P}_e^{\perp}\cdot\vec{u}$$

تعریف

$P_e^{\parallel}$ و $P_e^{\perp}$: Projection tensors (Symetric)

$P_e^{\parallel}$ تانسوری است که اگر در هر بردار ضرب شود آن را در جهت $\vec{e}$ تصویر کند.

Useful properties

$$P_e^{\perp} + P_e^{\parallel} = I$$

$$P_e^{\parallel}\cdot P_e^{\parallel} = P_e^{\parallel} \rightsquigarrow (P_e^{\parallel})^n = P_e^{\parallel}$$

$$P_e^{\perp}\cdot P_e^{\perp} = P_e^{\perp} \rightsquigarrow (P_e^{\perp})^n = P_e^{\perp}$$

$$P_e^{\parallel} \cdot P_e^{\perp} = 0$$

تعریف:

هر تانسور درجه دوراهی توان چنین تجزیه کرد:

$$\overleftrightarrow{A} = \underbrace{\alpha \overleftrightarrow{I}}_{\text{spherical Tensor}} + \underbrace{dev(A)}_{\text{deviatoric tensor}}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} tr(A) = \frac{1}{3} A_{ii} \quad , \quad \overleftrightarrow{dev(A)} = \overleftrightarrow{A} - \frac{1}{3} tr(A) \overleftrightarrow{I}$$

$$(dev(\ ))_{ij} = (\ )_{ij} - \frac{1}{3} (\ )_{kk} \delta_{ij}$$

useful properties

$$tr(dev(A)) = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ - & - & - \\ - & - & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}+A_{22}+A_{33}}{3} & 0 & 0 \\ & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} - \frac{I_1}{3} & A_{12} & A_{13} \\ - & A_{22} - \frac{I_1}{3} & A_{23} \\ - & - & A_{33} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}$$

1.12) Eigenvalus, Eigenvectors of Tensor

اگر بتوان برای یک تانسور امتداد $\vec{n}$ را به این گونه یافت که :

$$\overleftrightarrow{A} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n}$$

در این صورت

Eigenvalue of Tensor : λ

Eigenvector of Tensor : $\vec{n}$

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\boxed{-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0}$$

characterestic eq. (Polynomial)

معادله مشخصه

سه جواب : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$I_1 = tr(A) = A_{ii} \quad (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr(A))^2 - tr(A^2)\right] \quad \left(= \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ij})\right)$$

$$= tr(A^{-1}) \det(A) \quad (= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$$

$$I_3 = \det(A) \qquad \left(= \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right)$$

invarient : $\quad I_1(A) = I_1(A')$

$$I_1(A) = \mathrm{I}_A \;,\; I_2(A) = \mathrm{II}_A \;,\; I_3(A) = \mathrm{III}_A$$

useful properties:

1- $A^{\alpha} \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^{\alpha} \vec{n}_i$

λ_i و $\vec{n}_i$ مقادیر ویژه و بردار ویژه متناظر ماتریس A هستند.

α : یک مقدار صحیح مثبت است.

2- $A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 I = 0$ Cayley-Hamilton equation.

3. $\overleftrightarrow{A} = A_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = A'_{ij}\, \vec{n}_i \otimes \vec{n}_j$

$$A'_{ij} = \vec{n}_i \cdot \underbrace{\overleftrightarrow{A} \cdot \vec{n}_j} = \vec{n}_i \cdot \lambda_j \vec{n}_j = \lambda_j \delta_{ij}$$

$$[A'] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$ diagonal matrix

$$\vec{e}'_i \cdot A_{kl}\, \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \cdot \vec{e}'_j = A_{kl}\, a_{ik}\, a_{jl} = A'_{ij}$$

۱-۱۳) چند اپراتور مفید :

A, B : 2^{nd}-order tensors

قبلاً دیدیم

$$(A\otimes B)_{ijkl} = A_{ij}B_{kl} \quad \text{یا} \quad \overleftrightarrow{A}\otimes\overleftrightarrow{B} = A_{ij}B_{kl}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l$$

تعریف

$$\boxed{(A\,\bar{\otimes}\,B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}} \quad \text{یا} \quad \overleftrightarrow{A}\,\bar{\otimes}\,\overleftrightarrow{B} = A_{ik}B_{jl}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l$$

تعریف

$$\boxed{(A\,\underline{\otimes}\,B)_{ijkl} = A_{il}B_{jk}} \quad \text{......}$$

$$A\,\bar{\otimes}\,B = \overset{\updownarrow}{\overleftrightarrow{A}} = A_{ijkl}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l$$

$$\left(\overset{\updownarrow}{\overleftrightarrow{A}}\right)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}$$

useful properties

A, B, C : 2^{nd}-order tensors

1- $(A \bar{\otimes} B).C = A \bar{\otimes} (B.C)$

$$((A \bar{\otimes} B).C)_{ijkm} = (A \bar{\otimes} B)_{ijkl} C_{lm} = A_{ik} \overbrace{B_{jl} C_{lm}}^{B.C}$$

$$= A_{ik} (B.C)_{jm} = [A \bar{\otimes} (B.C)]_{ijkm}$$

2- $C : (A \bar{\otimes} B) = A^t . C . B$

$$[C : (A \bar{\otimes} B)]_{kl} = C_{ij} (A \bar{\otimes} B)_{ijkl} = C_{ij} (A_{ik} B_{jl})$$

$$= \overbrace{A_{ik}}^{A^t_{ki}} C_{ij} B_{jl} = (A^t . C . B)_{kl}$$