بسم الله الرحمن الرحیم — مکانیک رشد — جلسه ۷

1.14) Scaller, vector, Tensor Functions:

قبلاً دیدیم که:

$$\phi \equiv \phi(y_1, y_2, y_3) \qquad \text{a scaler field}$$

$$\vec{u} \equiv \vec{u}(y_1, y_2, y_3) \qquad \text{a vector field}$$

در اصل باید گفت

$$\phi(\vec{r}) \quad , \quad \vec{u}(\vec{r})$$

تعریف: یک tensor function یک تانسور است که برحسب یک یا چند تانسور نوشته شده باشد. به عبارتی آرگومان های آن، تانسوری باشند.

$\overleftrightarrow{A}(t, \vec{r}, \overleftrightarrow{S})$ یعنی تانسور A برحسب t (اسکالر)، $\vec{r}$ (بردار) و $\overleftrightarrow{S}$ (تانسور) می‌باشد.

$\phi(\overleftrightarrow{B})$ scaller_valued | of one tensor variable (tensor) function

$\vec{u}(\overleftrightarrow{B})$ vector_valued - - - - -

$\overleftrightarrow{A}(\overleftrightarrow{B})$ tensor_valued - - - - -

اگر توابع تانسوری برحسب یک اسکالر مثلاً زمانی باشند کار با آنها آشناست.

$$\vec{u}(t) = u_i(t)\,\vec{e}_i \longrightarrow \mathring{\vec{u}} = \mathring{u}_i(t)\,\vec{e}_i$$

(چون $\frac{d\vec{e}_i}{dt} = 0$)

$$\overleftrightarrow{A}(t) = A_{ij}(t)\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \rightsquigarrow \mathring{\overleftrightarrow{A}} = \mathring{A}_{ij}(t)\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

useful properties

$\vec{u}, \vec{v}$: vector_valued --

A, B: tensor_valued --

ϕ : scalere_valued ..

$$\overset{\circ}{\overline{\vec{u}\pm\vec{v}}} = \mathring{\vec{u}} \pm \mathring{\vec{v}}$$

$$\overset{\circ}{\overline{\phi\vec{u}}} = \frac{d}{dt}(\phi\vec{u}) = \mathring{\phi}\,\vec{u} + \phi\,\mathring{\vec{u}}$$

$$\overset{\circ}{\overline{\vec{u}\otimes\vec{v}}} = \frac{d}{dt}(\vec{u}\otimes\vec{v}) = \mathring{\vec{u}}\otimes\vec{v} + \vec{u}\otimes\mathring{\vec{v}}$$

$$\overset{\circ}{\overline{A\pm B}} = \overset{\circ}{A} \pm \overset{\circ}{B}$$

$$\overset{\circ}{\overline{tr(A)}} = tr(\overset{\circ}{A})$$

Problem: $\overset{\circ}{\overline{A^{-1}}} = -A^{-1}\overset{\circ}{A}A^{-1}$

$$A^{-1}\cdot A = I \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A^{-1}A}} = \overset{\circ}{I} \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A^{-1}}}\cdot A + A^{-1}\cdot\overset{\circ}{A} = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A^{-1}}}\cdot A = -A^{-1}\cdot\overset{\circ}{A}$$

طرفین را در A^{-1} ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A^{-1}}} = -A^{-1}\cdot\overset{\circ}{A}\cdot A^{-1}$$

Gradient of a scaler_valued (tensor) function

A: a tensor

$\phi(A)$: scaler_valued (tensor) function

مانند بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$\phi(A+dA) = \phi(A) + d\phi + O(dA)$$

$O(dA)$: باقیمانده $\rightsquigarrow \lim_{dA\to 0} \frac{O(dA)}{|dA|} = 0$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial A_{ij}} dA_{ij} \xrightarrow[\text{ضرب دونقطه}]{\text{طبق تعریف}}$$

$$\boxed{d\phi = \frac{\partial \phi(A)}{\partial A} : dA = tr\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial A}\right)^T \cdot dA\right]}$$

تعریف $\quad \dfrac{\partial \phi(A)}{\partial A} = grad\,(\phi(A))$ or $grad_A\,(\phi(A))$ or derivative of $\phi(A)$

Example: prove that $\dfrac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det(A)\, A^{-T}$

$$\det(A + dA) = \det(A(I + A^{-1}dA)) = \det(A)\, \det(I + A^{-1}dA) \qquad (*)$$

قبلاً در بحث مقدار و بردار ویژه، دیدیم که

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

$$(\lambda = -1,\ A = A^{-1}dA) \Rightarrow \det(A^{-1}dA + I) = 1 + I_{A^{-1}dA} + II_{A^{-1}dA} + III_{A^{-1}dA}$$

$$= 1 + tr(A^{-1}dA) + O(dA) \qquad (**)$$

$$\xrightarrow[(**)]{(*)} \quad \det(A+dA) = \det(A)\left[1 + tr(A^{-1}dA)\right] + O(dA)$$

$$= \det(A) + tr(\det(A)A^{-1}dA) + O(dA)$$

$$= \det(A) + (\det(A)A^{-1})^T : dA + O(dA)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A+dA) - \det(A)}_{d(\det(A))} = (\det(A)A^{-1})^T : dA \qquad (I)$$

از طرفی گفتیم که:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial A} : dA \qquad (II)$$

چون برای تمام dA ها برقرار است پس:

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det A \, A^{-T}$$

Gradient of a tensor-valued (tensor) functi

B: a tensor

$A(B)$: a tensor-valued (tensor) fun

$$A(B+dB) = A(B) + dA + O(dB)$$

$$dA_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{kl}}\, dB_{kl} = \left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_{ijkl} dB_{kl} = \left(\frac{\partial A}{\partial B} : dB\right)_{ij}$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial B} : dB$$

تعریف

$$\frac{\partial A(B)}{\partial B} = \mathrm{grad}\,(A(B)) = \mathrm{grad}_B\, A(B)$$

مثلاً اگر A و B تانسور درجه 2 باشند

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_{ijkl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{kl}}$$

problem: $\frac{\partial A}{\partial A} = ?$ $\qquad \left(\frac{\partial A}{\partial A}\right)_{ijkl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}}$

$$\partial A_{ij} = \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\partial A_{kl} \Rightarrow \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} = \delta_{ik}\,\delta_{jl}$$

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial A} = \mathbb{I}} = I \overline{\otimes} I \qquad (\mathbb{I} = \delta_{ik}\delta_{jl}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$$

Example: if $A = A^T$ (symmetric) prove that

$$\left(\frac{\partial A^{-1}}{\partial A}\right)_{ijkl} = -\tfrac{1}{2}\left(A^{-1}_{ik}A^{-1}_{lj} + A^{-1}_{il}A^{-1}_{kj}\right)$$

$$A^{-1}\cdot A = I \Rightarrow \frac{\partial (A^{-1}\cdot A)}{\partial A} = \mathbb{O}$$ (تانسور صفر درجه چهار)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial (A^{-1}\cdot A)}{\partial A}\right)_{ijkl} = \frac{\partial (A^{-1}\cdot A)_{ij}}{\partial A_{kl}} = \frac{\partial (A^{-1}_{im}A_{mj})}{\partial A_{kl}} = \frac{\partial A^{-1}_{im}}{\partial A_{kl}}A_{mj} + A^{-1}_{im}\frac{\partial A_{mj}}{\partial A_{kl}} = 0$$

$$\frac{\partial A^{-1}_{im}}{\partial A_{kl}}A_{mj}\cdot A^{-1}_{jn} = -A^{-1}_{im}\frac{\partial A_{mj}}{\partial A_{kl}} \cdot A^{-1}_{jn}$$

$$A_{mj} \rightarrow \tfrac{1}{2}(A_{mj} + A_{jm})$$

$$\frac{\partial A^{-1}_{im}}{\partial A_{kl}}\delta_{mn} = -\tfrac{1}{2}\left(A^{-1}_{im}\delta_{mk}\delta_{jl}A^{-1}_{jn} + A^{-1}_{im}\delta_{ml}\delta_{jk}A^{-1}_{jn}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial A^{-1}_{in}}{\partial A_{kl}} = -\frac{1}{2}\left(A^{-1}_{ik} A^{-1}_{ln} + A^{-1}_{il} A^{-1}_{kn}\right)$$